

МАТЕРИАЛЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

ПРИЛОЖЕНИЕ



К ЖУРНАЛУ

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ "КВАНТ"

Выпуск 1

*Материалы
вступительных экзаменов*

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ Н.Х.РОЗОВА И А.Л.СТАСЕНКО



МОСКВА БЮРО КВАНТУМ 1993

С о с т а в и т е л и

А. А. Егоров, Ж. М. Работ, В. А. Тихомирова, И. Ф. Шарыгин

П о д р е д а к ц и е й

профессора МГУ, доктора физико-математических наук Н. Х. Розова
и профессора МФТИ, доктора технических наук А. Л. Стасенко

М34 Материалы вступительных экзаменов. Задачи по математике и физике. Под редакцией *Н. Х. Розова* и *А. Л. Стасенко*. — М.: Бюро Квантум, 1993. — 320 с. (Приложение к журналу "Квант". Вып. 1)

ISBN 5-85843-002-3

Сборник содержит более тысячи задач по математике и около пятисот задач по физике, предлагавшихся на вступительных экзаменах в ведущие вузы в течение последних пяти — семи лет. Все задачи снабжены ответами, к некоторым задачам имеются указания или краткие решения.

Для старшеклассников и выпускников общеобразовательных школ, гимназий и лицеев, для слушателей подготовительных отделений и курсов, а также для всех тех, кто самостоятельно готовится к конкурсным экзаменам в вуз.

М $\frac{1602010000-02}{У24(03)-93}$ без объявл.

ББК 22.1

ISBN 5-85843-002-3

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	5
-------------	---

Задачи Ответы

МАТЕМАТИКА

Глава 1. Алгебраические уравнения	7	235
Глава 2. Алгебраические неравенства	22	241
Глава 3. Задачи на составление уравнений и неравенств	30	245
Глава 4. Показательные и логарифмические уравнения	44	246
Глава 5. Показательные и логарифмические неравенства	52	249
Глава 6. Планиметрия	57	251
Глава 7. Стереометрия	73	260
Глава 8. Тригонометрия	88	275
Глава 9. Элементы математического анализа	105	293

ФИЗИКА

Глава 1. Механика	112	296
Глава 2. Молекулярная физика. Тепловые явления	130	297
Глава 3. Основы электродинамики	142	298
Глава 4. Колебания и волны	156	299
Глава 5. Оптика	161	299
Глава 6. Квантовая физика	168	300

ВАРИАНТЫ

вступительных экзаменов 1992 года

1. Московский государственный университет	172	300
2. Независимый московский университет	189	302
3. Новосибирский государственный университет	191	303

	Задачи	Ответы
4. Санкт-Петербургский государственный университет	194	303
5. Московский авиационный институт	195	304
6. Московский государственный авиационный технологический университет	197	304
7. Московский государственный технический университет	199	304
8. Московский институт радиотехники, электроники и автоматики	201	305
9. Московский инженерно-строительный институт	202	305
10. Московский инженерно-физический институт	204	305
11. Московский институт электронного машиностроения	207	306
12. Московский институт электронной техники	211	307
13. Московский педагогический государственный университет	213	307
14. Московский технический университет связи и информатики	218	308
15. Московский физико-технический институт	222	309
16. Московский энергетический институт	228	310
17. Санкт-Петербургский государственный технический университет	231	311
Некоторые математические формулы и теоремы		312

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задача экзаменатора... вопреки распространенному воззрению школьников, состоит не в том, чтобы поскорее "срезать" незадачливого поступающего, а в том, чтобы тщательно взвесить, учитывая все обстоятельства экзаменационной обстановки, перспективы его дальнейшей работы по избранной им специальности... Приемные и экзаменационные комиссии более всего озабочены тем, чтобы не потерять ни одного поступающего, достаточно подготовленного и способного серьезно работать...

Академик А. Н. Колмогоров

Без сомнения, наилучшим подспорьем при подготовке к вступительному экзамену служит решение тех задач, которые в прошлые (недавние) годы служили пробным камнем для предшествующих поколений абитуриентов. Именно поэтому все годы существования журнала "Квант" на его страницах ведется специальный раздел "Практикум абитуриента". Сегодня журнал "Квант" предлагает тем, кто готовится к конкурсным экзаменам в вузы, задачник по математике и физике.

Составители этого задачника со всей доступной им тщательностью собрали вместе экзаменационные задачи различных университетов и институтов, перепроверили корректность условий и правильность решений. Однако сами решения в книге не приведены — вдумчивому читателю будет гораздо полезнее самостоятельно переваривать предлагаемую духовную пищу. Несомненно, что работа с книгой прояснит читателям многие "экзаменационные секреты" — особенно тем, кто живет в "глубинке" и не может воспользоваться услугами репетиторов.

Большая часть задач книги классифицирована по традиционным разделам школьного курса математики и физики, а внутри каждого раздела они по мере возможности расположены по возрастающей степени трудности. Но в задачнике представлена и подборка экзаменационных материалов (1992 года) в их оригинальном виде. Это даст возможность школьнику воочию увидеть то "меню", которое ему реально предложат на экзамене для выполнения

за определенное время. Кроме того, выбрав какой-либо вариант, читатель сам может "смоделировать" экзамен (только, чур, не подглядывая в ответ до самого конца!).

Конечно, на любом экзамене, а тем более на вступительном, важную роль играет не только содержательная подготовка, но и психологический настрой. Следует преодолеть в себе парализующий страх перед экзаменом, сконцентрировать свои мысли на главном — на решении задач.

Так что за дело — решайте на здоровье и с успехом поступайте в желанный вуз!

* * *

Составители благодарны всем, кто в течение многих лет предоставлял материалы вступительных экзаменов для публикации на страницах "Кванта". Материалы 1992 года представили: МГУ — В. Б. Алексеев, А. Н. Боголюбов, С. А. Волошин, И. Н. Ионовенков, С. С. Кротов, М. М. Потапов, В. А. Прошкин, А. Н. Соколин, С. С. Чесноков; НМУ — В. М. Имайкин, Н. Н. Константинов; НГУ — Г. В. Меледин; СПбГУ — В. М. Рябов; МАИ — Г. Э. Солохина; МАТИ — Р. А. Ведерников, М. Р. Либерзон, А. А. Симонов; МГТУ — Л. П. Паршев; МИРЭА — В. А. Горбаленко, В. А. Фотиев; МИСИ — Г. В. Орехов; МИФИ — В. И. Архипов, В. В. Грушин, О. В. Нагорнов, Д. В. Храмченков, В. Е. Чижов; МИЭМ — Г. В. Ефашкин, В. А. Тонян; МИЭТ — А. С. Овчинников, В. И. Плис; МПГУ — Г. А. Карасев, Б. Н. Кукушкин, О. Ю. Овчинников; МТУСИ — А. П. Жилинский, А. В. Куприн; МФТИ — С. С. Самарова, А. А. Шеронов; МЭИ — А. П. Касаткин, В. И. Прохоренко, М. Г. Тимошин; СПбГТУ — В. Н. Романов, И. Б. Русанов, С. П. Преображенский, С. Р. Тихомиров, Ю. А. Хватов.

МАТЕМАТИКА

Глава 1.

Алгебраические уравнения

Рациональные уравнения

Решите уравнения:

1.1. а) $x^2 - 1992x - 1993 = 0$;

б) $1993x^2 + x - 1992 = 0$.

1.2. $\frac{x-1}{x+2} + \frac{x+2}{x-3} + \frac{3}{2} = 0$.

1.3. $(x-2)^3 + (2x+1)^3 = 27(x-1)^3 + 8$.

1.4. $(x^2 + 3x - 1)^2 = x^2 + 3x + 1$.

1.5. $(x^2 - 10x)^2 - 3(x-5)^2 = 33$.

1.6. $x^2 + x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{27}{4}$.

1.7. $\frac{x^2 - x - 3}{x} + \frac{5x}{x^2 - x - 3} - 6 = 0$.

1.8. $\frac{29}{2x-5} - \frac{20}{x-2} - \frac{3}{2x-1} + \frac{7}{x-1} = 0$.

1.9. а) $3x^2 + 5x + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 16$;

б) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 2x + 1 = 0$.

1.10. $\frac{2x^2 + x + 2}{3x^2 - x + 3} = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - x + 1}$.

1.11. $(x-2)^4 + (x+1)^4 = 17$.

1.12. $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7) = 297$.

$$1.13. \text{ а) } (x^2 - 3x + 1)^2 + 3(x - 1)(x^2 - 3x + 1) = \\ = 4(x - 1)^2;$$

$$6) * (x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 6(x - 1)^2.$$

$$1.14. \frac{x^2 + x + 2}{3x^2 + 5x - 14} = \frac{x^2 + x + 6}{3x^2 + 5x - 10}.$$

$$1.15. \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{10}{9}.$$

$$1.16. \left[\frac{x}{x - 1} \right]^2 + \left[\frac{x}{x + 1} \right]^2 = \frac{40}{9}.$$

$$1.17. \frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10 \left[\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right].$$

$$1.18. \text{ а) } (x^2 + 3x - 2)^2 + 3(x^2 + 3x - 2) - 2 = x;$$

$$6) (x^2 + 2x - 1)^2 + 2x^2 + 3x = 3.$$

$$1.19. \frac{1}{x - 7} + \frac{2}{x - 5} = \frac{2}{6 - x} + \frac{1}{4 - x}.$$

$$1.20. x^2 + 2x + \frac{1}{x + 1} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}.$$

$$1.21. 3 \left[x + \frac{1}{x^2} \right] - 7 \left[1 + \frac{1}{x} \right] = 0.$$

Иррациональные уравнения

Решите уравнения:

$$1.22. 2\sqrt{x + 1} = 1.$$

$$1.23. \sqrt{x - 3} = \sqrt{2x - 5}.$$

$$1.24. 2x - 5\sqrt{x} - 7 = 0.$$

$$1.25. 2\sqrt{x + 1} = 3x - 5.$$

$$1.26. \sqrt{7x + 2} = 2\sqrt{x + 4}.$$

$$1.27. \sqrt{1 + 4x - x^2} = x - 1.$$

$$1.28. 2\sqrt{x^2 + 2} = 4x - 1.$$

$$1.29. x = 1 + \sqrt{7 - x}.$$

$$1.30. \text{ a) } (x^2 - 10)\sqrt{x + 3} = 0; \text{ б) } (x^2 - 4)\sqrt{2x + 5} = 0.$$

$$1.31. x\sqrt{x + 2} = \sqrt{x^3 + x + 1}.$$

$$1.32. \sqrt{3x + 1} - \sqrt{x - 1} = 2.$$

$$1.33. \text{ a) } \sqrt{(x - 3)(x - 2)} = 1; \text{ б) } \sqrt{x - 3} \sqrt{x - 2} = 1.$$

$$1.34. \sqrt{8x + 1} - \sqrt{x + 1} = 3.$$

$$1.35. \sqrt{2x + 1} - \sqrt{x - 1} = 2.$$

$$1.36. \sqrt{x - 7} - \frac{21}{\sqrt{x - 7}} + \sqrt{2x} = 0.$$

$$1.37. \text{ a) } \sqrt{7x + 1} - \sqrt{3x - 18} = \sqrt{2x + 7};$$

$$\text{б) } \sqrt{3x + 1} + \sqrt{4x + 3} - \sqrt{5x + 4} = 0.$$

$$1.38. \sqrt{x^2 + 8} + \sqrt{x^2 - 4} = 6.$$

$$1.39. \sqrt{x^2 + 5x + 3} - \sqrt{x^2 + 5x - 2} = 1.$$

$$1.40. \sqrt{\frac{x}{x^2 + x - 1}} + 2\sqrt{\frac{x^2 + x - 1}{x}} = 3.$$

$$1.41. 8\sqrt{12 + 16x - 16x^2} + 4x - 4x^2 = 33.$$

$$1.42. \sqrt{x^2 + x + 4} + \sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{2x^2 + 2x + 9}.$$

$$1.43. \text{ a) } \sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2};$$

$$6) \sqrt{4-x+4\sqrt{-x}} = 4 - \sqrt{4-x-4\sqrt{-x}}.$$

$$1.44. \sqrt{4-\sqrt{1-x}} = \sqrt{2-x}.$$

$$1.45. \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{x-\sqrt{x+8}}.$$

$$1.46. \frac{x-2}{2} + x^2 = \sqrt{\frac{(x-2)^2}{4} + x^4}.$$

$$1.47. \text{ a) } \sqrt{(x+4)(2x+3)} - 3\sqrt{x+8} = \\ = 4 - \sqrt{(x+8)(2x+3)} + 3\sqrt{x+4};$$

$$6) \sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = \\ = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}.$$

$$1.48. \text{ a) } \sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2+2} = \sqrt{3x^2+2x-3} + \\ + \sqrt{x^2+3x-1};$$

$$6) \sqrt{3x^2-1} + \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{3x^2+2x+1} + \\ + \sqrt{x^2+2x+4}.$$

$$1.49. \sqrt{x^2-9x+24} - \sqrt{6x^2-59x+149} = |5-x|.$$

$$1.50. \sqrt{4x^2+9x+5} - \sqrt{2x^2+x-1} = \sqrt{x^2-1};$$

$$6) \sqrt{2x^2+5x+3} - \sqrt{x^2-x-2} = \sqrt{2(x^2-1)}.$$

$$1.51. \sqrt{15x+12} - \sqrt{5x+2} = \sqrt{10(x+1)}.$$

$$1.52. \sqrt{x-2} + \sqrt{x+2} = x + \sqrt{x^2-4} - 4.$$

$$1.53. \sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x}.$$

$$1.54. \sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} = 1-2x^2.$$

$$1.55. \frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} + 2\sqrt{3x-2} = 3x.$$

$$1.56. \text{ a) } \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x} = x^2 - 4x + 6;$$

$$6) \sqrt{x+2} + \sqrt{6-x} = 3x^2 - 12x + 16.$$

$$1.57. \sqrt[3]{x-7} + \sqrt[3]{x+19} = 4.$$

$$1.58. \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{3x+2}.$$

$$1.59. \sqrt[3]{54 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{54 - \sqrt{x}} = \sqrt[3]{18}.$$

$$1.60. \sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5.$$

$$1.61. \sqrt{35-2\sqrt{45-2x}} = x-5.$$

$$1.62. \text{ a) } (2x+1)(1 + \sqrt{(2x+1)^2 + 7}) + \\ + x(1 + \sqrt{x^2 + 7}) = 0;$$

$$6) (2x+1)(2 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3}) + 3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3}) = 0.$$

Уравнения с модулем

Решите уравнения:

1.63. а) $|x + 1| = 2$; б) $|2x + 3| = 5$;

в) $2|x + 1| - |x| = 3$; г) $|x + 1| + |x - 2| = 3$;

д) $|x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| = 4$.

1.64. $|x^2 - x - 5| = 1$.

1.65. $x^2 - |x - \frac{1}{4}| = 0$.

1.66. $x^2 - 3|x| + 2 = 0$.

1.67. $|x^2 - x| = 1 - 2x$.

1.68. $|x^2 - x - 6| = |2x^2 + x - 1|$.

1.69. $x^2 - 2|x - 1| = 2$.

1.70. $|x|x - 1| - 2x| = x^2 - 2$.

1.71. $|x^2 - 3x + 2| + |x^2 - 5x + 6| = 2$.

1.72. а) $|x^3 - 3x + 1| = x^3 + 3x^2 - 1$;

б) $|x^3 - 3x + 1| = |x^3 + 3x^2 - 1|$.

1.73. $|2x^2 + 3x - 5| = 5 - 3x - 2x^2$.

1.74. $||x^3 + 3x^2 - 1| - 4| = x^3 + 3x^2 + 3$.

1.75. $|x - |x - |x - 1||| = \frac{1}{2}$.

1.76. а) $(3 - x)(|x| + 1 + \frac{7}{8}\sqrt{2} - \sqrt{5}) = 0$;

б) $(x - 2)\left[|x| + \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 0$.

1.77. а) $|x + 1 + |-x - 3|| - 6 = x$;

б) $|x - 2 - |4 - x|| + x = 7$.

$$1.78. \quad \left| 2|-x-4| - |x-2| \right| - 7 = x.$$

$$1.79. \quad \text{a) } \sqrt{25 + |16x^2 - 25|} = 4 + 4|x + 1|;$$

$$\text{б) } 5\sqrt{1 + |x^2 - 1|} = 3 + |5x + 3|.$$

Системы алгебраических уравнений

Решите системы уравнений:

$$1.80. \quad \begin{cases} 1992x + y = 1993, \\ 992x + 1000y = 1992. \end{cases}$$

$$1.81. \quad \begin{cases} 2|x - 2| + 3|y + 1| = 4, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

$$1.82. \quad \begin{cases} x + 2y = 4, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$$

$$1.83. \quad \begin{cases} x - y = 7, \\ x^3 - y^3 = 217. \end{cases}$$

$$1.84. \quad \begin{cases} 2x + 3y = 5xy, \\ 9x - 2y = 7xy. \end{cases}$$

$$1.85. \quad \begin{cases} x + y + 2xy = 7, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$$

$$1.86. \quad \begin{cases} 3(x + y)^2 + y = 4 - x, \\ 2(x - y)^2 - x = 1 - y. \end{cases}$$

$$1.87. \quad \begin{cases} x^2 + xy = 6, \\ y^2 + xy = 3. \end{cases}$$

$$1.88. \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ xy = 1. \end{cases}$$

$$1.89. \quad \text{a) } \begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 2, \\ 3x^2 + y^2 = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x^2 + xy = 3, \\ x^2 - xy + y^2 = 1. \end{cases}$$

$$1.90. \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - y = 5, \\ x^2 + y^2 + 3x - y = 6. \end{cases}$$

$$1.91. \begin{cases} \frac{xy}{x+3y} + \frac{x+3y}{xy} = 2, \\ \frac{xy}{x-y} + \frac{x-y}{xy} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$1.92. \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

$$1.93. \begin{cases} y^2 - x - 5 = 0, \\ \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

$$1.94. \begin{cases} \frac{1}{xy} - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2}, \\ x^2 y + xy^2 = 2. \end{cases}$$

$$1.95. \begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 - xy = 3. \end{cases}$$

$$1.96. \begin{cases} (x+1)(y+1) = 6, \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$$

$$1.97. \begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^3 + y^3 + x^3 y^3 = 17. \end{cases}$$

$$1.98. \begin{cases} x^2 y - xy^2 = 30, \\ x + xy - y = 13. \end{cases}$$

$$1.99. \begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

$$1.100. \begin{cases} x^4 + 16y^4 = 32, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

$$1.101. \begin{cases} x^3y + x^3y^2 + 2x^2y^2 + x^2y^3 + xy^3 = 30, \\ x^2y + xy + x + y + xy^2 = 11. \end{cases}$$

$$1.102. \begin{cases} x^2 - 4x + y^2 - 3y + 5 = 0, \\ 3x^2 - 11x + 3y^2 - 7y + 10 = 0. \end{cases}$$

$$1.103. \begin{cases} 25x + 9y^2 = -37, \\ 5(x+2)^{1/2}y = 2. \end{cases}$$

$$1.104. \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{4}{3}, \\ xy = 9. \end{cases}$$

$$1.105. \text{ а) } \begin{cases} y^4 + 19 = 20(x+y), \\ \sqrt{x} + \sqrt{x+2y} = \sqrt{2}; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 10(y-x) + x^4 = 11, \\ \sqrt{y} + \sqrt{y-2x} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$1.106. \begin{cases} 2x^2 + xy = 1, \\ \frac{9x^2}{2(1-x)^4} = 1 + \frac{3xy}{2(1-x)^2}. \end{cases}$$

$$1.107. \begin{cases} \sqrt[3]{x} \sqrt{y} + \sqrt{x} \sqrt[3]{y} = 12, \\ xy = 64. \end{cases}$$

$$1.108. \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{1}{2} \sqrt{xy}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

$$1.109. \begin{cases} 3\sqrt{(x-1)y} = y \left[2 + \sqrt{\frac{y}{x-1}} \right], \\ y^2 + xy - 5x + 7 = 0. \end{cases}$$

**Свойства корней квадратного уравнения.
Алгебраические задачи с параметрами**

1.110. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $9x^2 - 18x + 1 = 0$. Составьте квадратное уравнение с кор-

ниями а) $-x_1$ и $-x_2$; б) $2x_1$ и $2x_2$; в) $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$; г) $-\frac{1}{x_1}$ и $-\frac{1}{x_2}$.

1.111. При каких a разность корней уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ равна 1?

1.112. При каких значениях p

а) разность квадратов корней уравнения $3x^2 - 5x + p = 0$ равна $\frac{5}{9}$;

б) сумма кубов корней уравнения $4x^2 - 8x + p = 0$ равна 3,5?

1.113. При каких значениях k корни уравнения $x^2 + (k-1)x + 2k - 8 = 0$ удовлетворяют соотношению $2x_1 - x_2 = -6$?

1.114. Изобразите на плоскости точки $(p; q)$, для которых уравнение $x^2 - 2px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2 такие, что $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

1.115. При каких a корни уравнения $ax^2 - 3x - 3 - a^2 = 0$ являются целыми числами?

1.116. При каких a сумма корней уравнения

$$x^2 + 2(a^2 - 3a)x - (6a^3 - 14a^2 + 4) = 0$$

принимает наибольшее значение?

1.117. Найдите все значения p и q , для которых а) числа p и q ; б) числа $p + 2q$ и $4p + 7q$ являются корнями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

1.118. При каких значениях a все корни уравнения

$$x^2 - (3a+1)x + (2a^2 + 4a - 6) = 0$$

а) больше 1; б) меньше -1?

1.119. При каких значениях a один из корней уравнения

$$(a^2 - 2)x^2 + (a^2 + a - 1)x - a^3 + a^2 = 0$$

больше a , а другой меньше a ?

1.120. При каких значениях a корни уравнения

$$ax^2 - (2a+1)x + 3a - 1 = 0$$

больше 1?

1.121. Найдите все пары $(a; b)$, для которых уравнения $x^2 - ax + a = 0$ и $x^2 + b^2x - 8b = 0$ равносильны.

1.122. Найдите все значения u и v , при которых уравнения $x(x^2 + x - 8) = u$ и $x(x^2 - 6) = v$ имеют 2 общих различных корней.

1.123. Найдите все пары действительных чисел a и b , при которых уравнение

$$(3x - a^2 + ab - b^2)^2 + (2x^2 - a^2 - ab)^2 + x^2 + 9 = 6x$$

имеет хотя бы одно решение x .

1.124. Определите, при каких значениях параметра a все действительные решения уравнения

$x^4 + (x+1)((3a-2)x^2 + (2a^2 - a - 3)(x+1)) = 0$
 принадлежат отрезку $[-3; 0]$.

1.125. Множество M состоит из точек $(a; b)$ координатной плоскости, для которых $|a| \neq 1$ и уравнение

$$(3a - 4b + 15)x^4 + (7a - 24b + 35)x^2 + |a^2 - 1| + a^2 - 1 = 0$$

имеет ровно три решения. Докажите, что в многоугольник, внутренней областью которого является множество M , можно вписать окружность, и найдите координаты центра этой окружности.

1.126. Найдите все значения a , при которых уравнения $22x^4 + 33x^3 - 16ax^2 - 3x + 2 = 0$ и $11x^4 + 33x^3 + 21x^2 - 2ax - 2 = 0$ имеют общие корни. Найдите эти корни.

1.127. При каких значениях a уравнение

$$(x^2 - 2x)^2 - (a+2)(x^2 - 2x) + 3a - 3 = 0$$

имеет 4 различных корня?

1.128. Решите уравнения:

а) $\frac{x^2+1}{n(nx-2)} + \frac{1}{nx-2} - \frac{x}{n} = 0;$

б) $3 + \frac{2a-3}{(x-2)(x+a)} = \frac{2x+5a}{x+a};$

в) $\frac{4x+a}{2x-a} - \frac{3x-a}{x+a} = \frac{10a-2x}{2x+a-a^2};$

г) $\frac{x+2}{3x-a} + \frac{3-x}{3x^2+2ax-a^2} = \frac{3x+2}{x+a}.$

1.129. При каких значениях a все решения уравнения

а) $2|x-a| + a - 4 + x = 0$

удовлетворяют неравенству $0 \leq x \leq 4;$

б) $3|x+2a| - 3a + x - 15 = 0$

удовлетворяют неравенству $4 \leq x \leq 9?$

1.130. Решите уравнения:

а) $|x+2| + a|x-4| = 6;$ б) $|x+1| + a|x-2| = 3.$

Решите уравнения:

1.131. а) $\sqrt{x-a} - \sqrt{x} = 1;$ б) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-ax}}.$

$$1.132. \sqrt{a^2 - x^2} + x - 1 = 0.$$

$$1.133. \text{ а) } \sqrt{x^2 - x + \frac{p^2}{(x+1)^2}} = \frac{p}{x+1} - x;$$

$$\text{б) } \sqrt{4x^2 + x + \frac{p^2}{(x-1)^2}} = 2x - \frac{p}{x-1}.$$

$$1.134. \text{ а) } \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} = a;$$

$$\text{б) } \sqrt{2x+a} - \sqrt{x-1} = 2; \text{ в) } \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-a} = 2;$$

$$\text{г) } \sqrt{2x+a} - \sqrt{x-a} = 2; \text{ д) } \sqrt{2x+a} - \sqrt{x-a} = 2a.$$

$$1.135. \sqrt[3]{x+c+63} - \sqrt[3]{x+c-1} = 4.$$

$$1.136. \text{ а) } x = 2a + \sqrt{4a^2 - x} \sqrt{x^2 - 4a^2};$$

$$\text{б) } x = a - \sqrt{a^2 - x} \sqrt{x^2 + a^2}.$$

1.137. При каких a уравнение имеет ровно один корень?

$$\text{а) } (x-3)(x+1) + 3(x-3) \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2);$$

$$\text{б) } (x+2)(x+4) + 5(x+2) \sqrt{\frac{x+4}{x+2}} - (a+2)(a-3) = 0.$$

1.138. а) Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2ax + y = a^2 - 2a, \\ -10x + (a-6)y = 10a - 5a^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

б) Найдите все пары значений (α, β) , при каждой из которых система уравнений

$$\begin{cases} 8x + (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)y = 4, \\ (\alpha - \beta)x + 26y = 2 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

1.139. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ 2xy + 2y = -a^2 - 4 \end{cases}$$

имеет решение?

1.140. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt{y} = a + 1, \\ a + 3 - \sqrt{y} = \frac{1}{2}(a - x)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1.141. Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} - y = a, \\ \sqrt{x} y = 1 - a. \end{cases}$$

а) Решите систему при $a = 2$.

б) При каких значениях a система имеет единственное решение?

в) При каких значениях a система имеет решение (x, y) такое, что $x \geq y^2$?

1.142. Найдите все значения параметра k , при которых система уравнений

$$\begin{cases} y - \frac{1}{2} = k(x + 2), \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

имеет решение.

1.143. При каких значениях параметра

а) система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| + x = b \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение;

б) система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - |x| = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения;

в) система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ |y| - x = b \end{cases}$$

имеет ровно три решения;

г) система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y + |x| - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

1.144. При каких значениях параметра a система уравнений

а)
$$\begin{cases} 3y + 2 + xy = 0, \\ x(y + 1 - a) + y(2a - 3) + a + 3 = 0, \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

1.145. При каких значениях параметра b система уравнений

$$\begin{cases} bx^2 + 2bx + y + 3b - 3 = 0, \\ by^2 + x - 6by + 11b + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

1.146. Найдите все пары значений a и b , для которых система

$$\begin{cases} bx(2x - y) + (y - 1)(2x - y) = bx + y - 1, \\ 4x^2 + y^2 + axy - 1 = 0 \end{cases}$$

а) имеет больше четырех решений;

б) имеет не менее пяти решений.

1.147. Найдите все значения a , при которых система уравнений

а)
$$\begin{cases} 9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 13y + 3 = 0, \\ 13x^2 + 6xy + 10y^2 + 16x + 2y - 4ax - 6ay + a^2 - 2a + 3 = 0, \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2x - 6y = 0, \\ 5x^2 - 16xy + 13y^2 - 6x + 10y + 2ax - 4ay + a^2 - 2a - 5 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

1.148. Найдите все действительные значения α , при каждом из которых система уравнений

$$а) \begin{cases} y(\alpha x + 1) + 13x - \alpha(1 + y) = 0, \\ x - xy + |2 + y| = 0, \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} y(\alpha x + 3) + x - \alpha(y + 1) = 0, \\ |x + 4| + y = xy \end{cases}$$

имеет действительные решение.

1.149. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$а) \begin{cases} \sqrt{|y + 3|} = 1 - \sqrt{5|x|}, \\ 16a - 9 - 6y = 25x^2 + y^2, \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 1 - \sqrt{|x - 1|} = \sqrt{7|y|}, \\ 49y^2 + x^2 + 4a = 2x - 1 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

1.150. Найдите все значения параметра a , при которых равносильны системы уравнений

$$а) \begin{cases} -x + 2y = 2 - a, \\ -x + ay = a - 2a^2 \end{cases}$$

$$и \begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} ax + 3y = 6a - 4, \\ x + y = 2a \end{cases}$$

$$и \begin{cases} x^2 - 2y^4 - 6x + 8 = 0, \\ x^2 + y^2 - (2a + 4)x + 2(a^2 + a + 2) = 0. \end{cases}$$

1.151. Найдите все значения a , при каждом из которых для любого значения b система уравнений имеет по крайней мере одно решение (x, y, z) :

$$а) \begin{cases} 2bx + y = a, \\ (1 - b)x + by - z - z^2 = 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x - by + az^2 = 0, \\ 2bx + (b - 6)y - 8z = 8. \end{cases}$$

1.152. Найдите все действительные решения системы уравнений

$$а) \begin{cases} x^3 + x^2(13 - y - z) + x(2y + 2z - 2yz - 26) + 5yz - 7y - 7z + 30 = 0, \\ x^3 + x^2(17 - y - z) - x(2y + 2z + 2yz - 26) + y + z - 3yz - 2 = 0, \end{cases}$$

в которых x принадлежит отрезку $[4; 7]$;

$$б) \begin{cases} 2x^3 + x^2(24 - 2y - 2z) + x(80 - yz - 10y - 10z) + 65 - 9y - 9z - 4yz = 0, \\ 2x^3 + x^2(14 - 2y - 2z) - x(4 + yz) - 30 + 5y + 5z + yz = 0, \end{cases}$$

в которых x принадлежит отрезку $[3; 5]$.

Глава 2

Алгебраические неравенства

Рациональные неравенства

Решите неравенства:

2.1. а) $x^2 - 1994x + 1993 \leq 0$;

б) $997x^2 - 996x - 1993 > 0$.

2.2. а) $(2x^2 + 2x - 1)(x^2 + x - 2) < 2$;

б) $(x - 1)^2(x^2 - 2x - 3) \leq -4$; в) $(x - 3)^4 - 4(x^2 - 6x) > 32$;

г) $x(x - 1)(x + 2)(x - 3) \leq 7$.

2.3. а) $\frac{1}{x+2} \leq 3$; б) $x + 3 < \frac{1}{x+1}$;

в) $x \leq \frac{2}{x+1}$; г) $\frac{1}{2x} \geq \frac{1}{1-x}$; д) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \leq \frac{2}{x+2}$;

$$e) \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-2)(x+3)} \geq 0.$$

$$2.4. \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^2 + x - 1} \geq x + 1.$$

$$2.5. (x^2 + 3x)(2x + 3) - 16 \frac{2x+3}{x^2+3x} \geq 0.$$

$$2.6. \frac{x^2 - x - 1}{2x^2 + x - 2} \geq \frac{x}{3x^2 - x - 3}.$$

$$2.7. \frac{x+6}{x-6} \left[\frac{x-4}{x+4} \right]^2 + \frac{x-6}{x+6} \left[\frac{x+9}{x-9} \right]^2 > \frac{2x^2+72}{x^2-36}.$$

Неравенства с модулем

Решите неравенства:

$$2.8. \text{ а) } |x - 1| < 1; \text{ б) } |2x + 1| \geq 1; \text{ в) } |3x + 1| < \frac{x}{2};$$

$$г) |x + 2| < |x - 2|.$$

$$2.9. \text{ а) } 2|x + 1| - |x - 1| > 3; \text{ б) } |x + 1| + |x - 1| \leq 2;$$

$$\text{в) } |x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| \geq 4;$$

$$г) |x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| > 4; \text{ д) } |x + 1| - |x - 1| > 1.$$

$$2.10. \text{ а) } 7|x + 2| + |2x - 5| \leq 20;$$

$$\text{б) } 3|x - 2| + |5x + 4| \leq 10.$$

$$2.11. \text{ а) } \left| \frac{x+1}{2x-1} \right| < 1; \text{ б) } \left| \frac{x+3}{2x-3} \right| > 1.$$

$$2.12. \text{ а) } \frac{|4-x|-x}{|x-6|-2} > 2; \text{ б) } \frac{|2-x|-x}{|x-3|-1} \leq 2;$$

$$\text{в) } \frac{|x+1| + |x-2|}{x+199} < 1.$$

$$2.13. \text{ а) } \left| |x| - |2x - 7| \right| < 1; \text{ б) } \left| 2|x| - 1 \right| \leq x + 2.$$

$$2.14. \text{ а) } y^2 - 4|y| < 12; \text{ б) } y^2 + 3|y| > 10.$$

$$2.15. \text{ а) } x^2 + |5x - 4| - 1 \leq |3x - 2|;$$

$$\text{б) } x^2 + 2|x - 1| + 7 \leq 4|x - 2|.$$

$$2.16. \text{ а) } |x^2 + 3x| < x + 4; \text{ б) } |x^2 - 3x| \geq x + 5;$$

$$\text{в) } |2x^2 + x - 1| > |x + 1|;$$

$$\text{г)} |24x^2 - 39x - 8| < |18x^2 - 25x + 32|.$$

$$2.17. \text{ а)} |x^3 - 3x + 1| \leq x^3 + x^2 - 1;$$

$$\text{б)} |x^3 - 3x + 1| \leq |x^3 + x^2 - 1|;$$

$$\text{в)} |x^3 - 3x + 2| \geq x^3 + x^2 - 2.$$

$$2.18. \text{ а)} \frac{1}{x-1} + \frac{2}{|x|+1} \geq \frac{1}{|x|-1};$$

$$\text{б)} \frac{1}{x+1} + \frac{3}{|x|-1} \geq \frac{2}{x-1}.$$

Иррациональные неравенства

Решите неравенства:

$$2.19. \text{ а)} 2\sqrt{x+1} < \sqrt{x+5}; \quad \text{б)} \sqrt{3x+2} \geq \sqrt{2x+1};$$

$$\text{в)} \sqrt{5x+1} < \sqrt{3x-2}.$$

$$2.20. \quad \sqrt{2+x} > x; \quad \text{б)} \sqrt{4x+5} \leq x;$$

$$\text{в)} x - \sqrt{1-x} \leq 0; \quad \text{г)} \sqrt{2x^2+x} > 1+2x.$$

$$2.21. \text{ а)} \sqrt{x-6} \sqrt{x+3} > x-2;$$

$$\text{б)} \sqrt{x^2-3x-18} > x-2;$$

$$\text{в)} \sqrt{2x^2-7x+5} < x+\sqrt{5}; \quad \text{г)} \sqrt{81-x^2} > 2x-17;$$

$$\text{д)} \sqrt{2x^2+15x-17} > x+3.$$

$$2.22. \quad \frac{1}{1-\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}+1}.$$

$$2.23. \text{ а)} \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} < 1; \quad \text{б)} \frac{\sqrt{4-x}}{x-2} < 1;$$

$$\text{в)} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x+1} < 1; \quad \text{г)} \frac{\sqrt{x^2-16}}{x+5} \leq 1.$$

$$2.24. \text{ а)} \sqrt{\frac{x^2+x-6+3x+13}{x+5}} > 1; \quad \text{б)} \sqrt{\frac{x^2-3x-4-3x+16}{6-x}} \leq 1.$$

$$2.25. \text{ a) } (x^2 - 18x + 77) \sqrt{10 - x} \geq 0;$$

$$6) (x^2 - 3x - 40) \sqrt{2x - 3} \geq 0; \quad \text{b) } \frac{3(4x^2 - 9)}{\sqrt{3x^2 - 3}} \leq 2x + 3.$$

$$2.26. \frac{x-1}{2} > \sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4}}.$$

$$2.27. \text{ a) } \sqrt{\frac{12+x-x^2}{x-11}} \geq \sqrt{\frac{12+x-x^2}{2x-9}};$$

$$6) \sqrt{\frac{6+x-x^2}{2x-1}} \geq \sqrt{\frac{6+x-x^2}{3x+2}}.$$

$$2.28. \text{ a) } \sqrt{3x+1} - \sqrt{x-4} > 3; \quad 6) \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} \geq 2;$$

$$\text{b) } \sqrt{x-6} - \sqrt{10-x} \geq 1; \quad \text{r) } 3\sqrt{x} - \sqrt{5x+5} < 1.$$

$$2.29. \text{ a) } \sqrt{x+6} > \sqrt{x+1} + \sqrt{2x-5};$$

$$6) \sqrt{3x+1} + \sqrt{x+8} < \sqrt{4x+21}.$$

$$2.30. \text{ a) } \sqrt{x^2+3x+2} - \sqrt{x^2-x+1} < 1;$$

$$6) \sqrt{3x^2+5x+7} - \sqrt{3x^2+5x+2} > 1.$$

$$2.31. \sqrt{|x+1| + |x+5|} > |x + \frac{5}{2}|;$$

$$2.32. \sqrt{x+5} + \sqrt{x+8} > \sqrt{7-x} + \sqrt{3x+6}.$$

$$2.33. \text{ a) } \sqrt{x+4} > \sqrt{2-\sqrt{3+x}}; \quad 6) \sqrt{4-\sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0;$$

$$\text{b) } \sqrt{4-\sqrt{-x-4}} < \sqrt{-x-3}; \quad \text{r) } \sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} > x-1.$$

$$2.34. \text{ a) } \sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}} > 4.$$

$$6) \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \geq 3;$$

$$\text{в) } \sqrt{x+\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} \geq 2.$$

$$2.35. \text{ а) } \sqrt{x+7} - 1 < \sqrt{-x-5} + \sqrt{(x+7)(-x-5)};$$

$$\text{б) } \sqrt{x+5} < 1 + \sqrt{-x-3} + \sqrt{(x+5)(-x-3)}.$$

$$2.36. \text{ а) } \sqrt{\frac{x^2-1}{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} > \frac{x-1}{x};$$

$$\text{б) } \sqrt{9 - \frac{9}{x}} < x - \sqrt{x - \frac{9}{x}}.$$

$$2.37. \text{ а) } \sqrt{x-1} + x - 3 \geq \sqrt{2(x-3)^2 + 2x-2};$$

$$\text{б) } \sqrt{x - \frac{1}{2}} + \frac{x+1}{4} < \sqrt{2x - 1 + \frac{(x+1)^2}{8}};$$

$$\text{в) } \sqrt{x^2-5} + x^2 - 7 \geq \sqrt{2(x^2-7)^2 + 2x^2-10}.$$

$$2.38. \text{ а) } \sqrt{9v^2-48v-21} + \sqrt{9v^2-51v-15} \leq |3v-6|;$$

$$\text{б) } \sqrt{4v^2-4v-84} + \sqrt{4v^2-6v-85} \leq |2v+1|.$$

Алгебраические неравенства с параметрами

Решите неравенства:

$$2.39. \text{ а) } 2ax + \frac{a-1}{2} \geq (a+2)x;$$

$$\text{б) } \frac{1}{a-x} < 2; \quad \text{в) } \frac{2x-1}{x+a} \geq 1; \quad \text{г) } \frac{ax+1}{x+2a} < 1;$$

$$\text{д) } \frac{m}{mx+1} + \frac{1}{mx-1} < \frac{1}{1-m^2x^2}, \text{ если } m > 0.$$

$$2.40. \text{ а) } |2x - a| \leq x + 1; \quad \text{б) } |ax + 1| \leq \frac{x}{2}.$$

2.41. При каких значениях a неравенство

$$\text{а) } x^2 + 2x + a > 0, \quad \text{б) } ax^2 + 2x + a \leq 0;$$

$$\text{в) } ax^2 + 2ax + 2 - a^2 \geq 0$$

выполняется при всех x ?

2.42. Решите неравенства:

а) $x^2 - (a + 5)x + (2 - a)(2a + 3) < 0$;

б) $ax^2 + (2a - 1)x + 1 - 3a \geq 0$;

в) $x^2 + (a - 4)x + 3 - 2a > 0$;

г) $ax^2 + 2x + 1 \geq 0$.

2.43. а) При каких значениях a неравенство

$$(x + 3 - 2a)(x + 3a - 2) < 0$$

выполняется при всех $2 \leq x \leq 3$?

б) При каких значениях a неравенство

$$\frac{x - \frac{a}{4}}{x - 2a} < 0$$

выполняется при всех $2 \leq x \leq 4$?

в) При каких значениях a неравенство

$$(x + 2a + 3)(x - a + 5) > 0$$

выполняется при всех $x > 1$?

г) При каких значениях a неравенство

$$\frac{x + 3a - 5}{x + a} > 0$$

выполняется при всех $1 \leq x \leq 4$?

2.44. а) При каких значениях a неравенство

$$ax^2 + 2x + 2a - 1 < 0$$

выполняется при всех $x \geq 1$?

б) При каких значениях a неравенство

$$ax^2 + (2a - 1)x + 1 - 3a < 0$$

выполняется при всех $x \geq 2$?

2.45. При каких значениях a неравенство

а) $\frac{x^2 + ax - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$; б) $-1 \leq \frac{ax^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} \leq 1$;

в) $\frac{x - 2}{ax^2 - 2x + a - 2} < 1$

выполняется при всех x ?

2.46. Найдите все значения параметра a , при которых из неравенства $ax^2 + x - 4a + 2 < 0$ следует неравенство $-2 < x < 0$.

2.47. При каких значениях параметра a всякое решение неравенства $x^2 - 3x + 2 < 0$ будет одновременно решением неравенства $ax^2 - (3a + 1)x + 3 > 0$?

2.48. Решите неравенства

а) $\sqrt{4x + a + 1} \geq 2x$; б) $x + 2a - \sqrt{3ax + 4a^2} > 0$;

в) $x + 2a - 2\sqrt{3ax + a^2} > 0$.

2.49. а) Определите все значения параметра a , при которых ровно одно решение неравенства

$$\sqrt{(a+3)(a^2+a-6)} x^3 - \sqrt{a^4+a^3-6a^2} x^2 + \sqrt{a^3+3a^2} x - a^2 \leq 0$$

удовлетворяет условию $1 \leq x \leq 4 + a$.

б) Определите все значения параметра a , при которых ровно одно решение неравенства

$$\sqrt{a^3-2a^2-4a+8} x^3 - \sqrt{a^3-2a^2} x^2 + \sqrt{a^4-4a^2} x - a^2 \leq 0$$

удовлетворяет условию $2a \leq x \leq \sqrt{13}a$.

2.50. а) Найдите все значения p , при каждом из которых множество решений неравенства

$$(p - x^2)(p + x - 2) < 0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 1$.

б) Найдите все значения q , при каждом из которых множество решений неравенства

$$(q - x^2)(q + 2x - 8) < 0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 4$.

2.51. а) Найдите все a , при которых неравенство

$$\frac{1}{2}|a-2| \cdot |x+a-4| + \left[\frac{a^2-4a+3}{|a-2|} - |a-2| \right] |x-2| + \frac{1}{2}|a-2| \cdot |x-a| \leq 1$$

выполняется ровно для двух различных значений x .

б) Найдите все a , при которых неравенство

$$\frac{1}{2}|a+3| \cdot |x+a+6| + \left[|a+3| - \frac{a^2+6a+8}{|a+3|} \right] |x+3| - \frac{1}{2}|a+3| \cdot |x-a| \geq -2$$

выполняется ровно для двух различных значений x .

2.52. При каких значениях параметра a множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + (a + 4)x + 4a \leq y, \\ 3x + y - (2a + 4) \leq 0 \end{cases}$$

содержит отрезок $[-2; -1]$ оси Ox ?

2.53. При каких значениях b система

$$\begin{cases} x + 3y = 2b + 1, \\ 3xy = 4b^2 + 2b - 1, \\ x^2 + 9y^2 \leq -4b^2 + 2b + 2 \end{cases}$$

имеет решение?

2.54. Найдите все решения системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 6y \leq 0, \\ y^2 - 2xy + 9 \leq 0. \end{cases}$$

2.55. а) При каком значении параметра b система неравенств

$$\begin{cases} y \geq (x - b)^2, \\ x \geq (y - b)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

б) При каком значении параметра a система неравенств

$$\begin{cases} y \geq x^2 + 2a, \\ x \geq y^2 + 2a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

2.56. Найдите все значения a , при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x, y , удовлетворяющая уравнению

$$-15x^2 + 11xy - 2y^2 = 7$$

и двум неравенствам

$$x < y, \quad 2a^2x + 3ay < 0.$$

2.57. а) Найдите наименьшее значение, принимаемое выражением $x + 5y$, если $x > 0$, $y > 0$ и $x^2 - 6xy + y^2 + 21 \leq 0$.

б) Какое наибольшее значение может принимать сумма $x + 3y$, если $x^2 + xy + 4y^2 \leq 3$?

2.58. а) Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + y^2$, если $x^2 + y^2 - xy = 4$.

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения

выражения $x^2 - xy + y^2$, если $2x^2 + 2xy + y^2 = 2$.

2.59. а) Найдите наименьшее из значений x , для которых существуют числа y, z , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + xy - xz - yz = 1$$

б) Найдите наибольшее из значений z , для которых существуют числа x, y , удовлетворяющие уравнению

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + xy + xz + yz = 4.$$

2.60. а) Числа x, y, z таковы, что

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 2.$$

Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x + y - z$?

б) Числа a, b, c таковы, что

$$2a^2 + b^2 + c^2 = 3.$$

Какое наименьшее значение может принимать выражение $a - 2b + c$?

2.61. Найдите все значения a , при каждом из которых существует единственная тройка чисел (x, y, z) , удовлетворяющая равенствам $x + y + z = x^2 + 4y^2$ и $x + 2y + 3z = a$.

2.62. а) При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2 \end{cases}$$

имеет решение?

б) При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} 5x^2 + 7xy + 2y^2 \geq \frac{3a+1}{a+2}, \\ 3x^2 + xy + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

имеет решение?

Глава 3

Задачи на составление уравнений и неравенств

3.1. Велосипедист должен проехать 36 км за определенное время. После двух часов пути он сделал остановку на 20 минут и, чтобы ликвидировать отставание, оставшийся путь проезжал со скоростью большей прежней на 6 км/ч. Какова первоначальная скорость велосипедиста?

3.2. Участок дороги между городами A и B имеет подъем, а затем спуск, причем тот и другой — одинаковой длины. Найдите среднюю скорость автобуса на пути из A в B , если его скорость на подъеме равна 40 км/ч, скорость на спуске — 80 км/ч, а расстояние между городами A и B равно 160 км. Зависит ли значение средней скорости от расстояния между городами?

3.3. Лодка прошла по течению реки 34 км и 39 км против течения, затратив на это столько времени, сколько ей нужно, чтобы пройти в стоячей воде 75 км. Найдите отношение скорости лодки в стоячей воде к скорости течения.

3.4. а) Из города A в город B , находящийся на расстоянии 105 км от A , с постоянной скоростью v км/ч выходит автобус. Через 30 минут вслед за ним из A со скоростью 40 км/ч выезжает автомобиль. Догнав в пути автобус, он поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определите все те значения v , при которых автомобиль возвращается в A позже, чем автобус приходит в B .

б) Из города A в город B , находящийся на расстоянии 210 км от A , с постоянной скоростью v выходит автобус. Через 30 мин вслед за ним из A со скоростью 80 км/ч выезжает автомобиль, который, догнав автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определите все те значения v , при которых автомобиль возвращается в город A позднее, чем автобус приходит в город B .

3.5. Два велосипедиста выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Первый из них едет со скоростью 15 км/ч, второй — 12 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехал третий велосипедист, который через некоторое время догнал второго, а еще через 1 ч 30 мин догнал и первого. Найдите скорость третьего велосипедиста.

3.6. Когда патрульная машина группы захвата получила приказ о преследовании преступника, расстояние между ней и машиной преступника было 3 км. Машина преступника уходит от машины группы захвата со скоростью 72 км/ч, а машина группы преследует ее со скоростью 75 км/ч. Какое будет расстояние между машинами через 4 минуты?

3.7. Турист проехал в лодке по реке из города A в город B и обратно, затратив на это 10 часов. Расстояние между городами 20 км. Найдите скорость течения реки, зная, что турист проплывал 2 км против течения за такое же время, как 3 км по течению реки.

3.8. Расстояние между пристанями A и B по реке 50 км, по шоссе — 40 км. Пассажир опоздал к отплытию теплохода из A на $1,5$ часа. Он мгновенно садится в такси и достигает B одновременно с теплоходом. Выяснилось,

что скорость такси была на 55 км/ч больше скорости теплохода. Какова скорость теплохода?

3.9. Теплоход прошел по течению реки 120 км и столько же против течения и затратил на весь путь 8 ч . Определите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки равна 8 км/ч

3.10. Два мотоциклиста, выехав одновременно из пункта A , едут с разными, но постоянными скоростями в пункт B и, достигнув его, сейчас же поворачивают обратно. Первый мотоциклист, обогнав второго, встречает его на обратном пути на расстоянии 13 км от B , затем, достигнув A и снова повернув обратно к B , он встречает второго мотоциклиста, проехав $1/7$ расстояния от A до B . Найдите расстояние от A до B .

3.11. а) Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу из A в B и из B в A . После встречи одному придется быть в пути еще два часа, а другому $9/8$ часа. Определите скорости автомобилей, если $AB = 210 \text{ км}$

б) Два всадника выезжают одновременно из A и B навстречу друг другу, и один прибывает в B через 27 минут, а второй в A через 12 минут после встречи. За сколько минут проехал каждый всадник путь AB ?

3.12. Водитель грузовика, участвующий в ралли, рассчитывал проехать всю трассу со скоростью 80 км/ч . Из-за неполадок первую треть пути он ехал со скоростью, на $a \text{ км/ч}$ меньшей расчетной, зато потом, устранив неполадки, он увеличил свою скорость на $2a \text{ км/ч}$ по сравнению с предполагавшейся, и эта скорость сохранялась до конца пути. При каком значении a путь будет преодолен скорее всего?

3.13. Пристань A находится выше по течению реки, чем пристань B . Из A и B одновременно навстречу друг другу начали движение плот и моторная лодка. Достигнув пристани A , моторная лодка немедленно повернула обратно и догнала плот в тот момент времени, когда он проплыл $2/3$ расстояния между A и B . Найдите время, которое затрачивает плот на путь из A в B , если известно, что моторная лодка проплывает из B в A и обратно за 3 часа.

3.14. От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км , затем повернул обратно и вернулся в A через 14 часов. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A .

3.15. Время, затрачиваемое велосипедистом на прохождение каждого очередного километра пути, на одну и ту же величину больше, чем время, затраченное им на прохождение предыдущего километра. Известно, что на прохождение второго и четвертого километров после старта

он затратил в сумме 3 мин 20 с. За какое время велосипедист проехал первые 5 км после старта?

3.16. Из пунктов A и B , расстояние между которыми равно 120 км, навстречу друг другу движутся два поезда. Если первый поезд выйдет из A на два часа раньше, чем второй выйдет из B , то они встретятся на середине пути. За какое время первый поезд проходит расстояние от A до B , если через час после встречи расстояние между поездами будет равно 80 км?

3.17. Путь от A до B пассажирский поезд проходит на 3 часа 12 минут быстрее товарного. За то время, что товарный поезд проходит путь от A до B , пассажирский проходит на 288 км больше. Если скорость каждого поезда увеличить на 10 км/ч, то пассажирский пройдет от A до B на 2 часа 24 минуты быстрее товарного. Определите расстояние от A до B .

3.18. Из пункта A в пункт B вышел пешеход и выехал велосипедист, а из B в A выехал верховой. Все трое отправились в путь одновременно. Через 2 часа велосипедист и верховой встретились на расстоянии 3 км от середины AB , а еще через 48 мин встретились пешеход и верховой. Найдите скорость каждого и расстояние AB , если известно, что пешеход движется вдвое медленнее велосипедиста.

3.19. Расстояние между пунктами A и B равно 60 км, причем $\frac{2}{3}$ дороги приходится на шоссе, а остальная часть на грунтовую дорогу. Найдите скорость движения автомобиля по грунтовой дороге и по шоссе, если на шоссе скорость его движения на 20 км/ч больше его скорости по грунтовой дороге, а на весь путь он затратил всего 2 часа.

3.20. Один турист вышел в 6 часов, а второй навстречу ему в 7 часов. Встретились они в 8 часов и не останавливаясь продолжили путь. Сколько времени затратил каждый из них на весь путь, если первый пришел в то место, откуда вышел второй, на 28 минут позже, чем второй пришел в то место, из которого вышел первый? Считайте, что каждый шел без остановок с постоянной скоростью.

3.21. Два лыжника стартовали один за другим с интервалом в две минуты. Второй лыжник догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта. Дойдя до поворота на отметке 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретился с первым лыжником. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого лыжника. Найдите скорость первого лыжника.

3.22. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Вслед за ним через 2 часа из пункта A выехал велосипедист, а еще через 30 минут — мотоциклист. Пешеход, велосипедист и мотоциклист двигались равномерно и без остановок. Через некоторое время после выезда мотоциклиста оказалось, что к этому моменту все трое преодолели одинаковую

часть пути от A до B . На сколько минут раньше пешехода в пункт B прибыл велосипедист, если пешеход прибыл в пункт B на 1 час позже мотоциклиста?

3.23. а) До приближающегося Ахиллеса оставалось еще 6 м, когда черепаха поняла, что ей не уйти от погони, и обреченно остановилась. Какой путь с начала погони проделала черепаха, если ее скорость в 17 раз меньше скорости Ахиллеса, расстояние между ними за время погони сократилось в 9 раз, и их движение происходило по одной прямой?

б) Обнаружив в 64 метрах от себя уползающую черепаху, Ахиллес начал ее преследовать. Сократив расстояние до черепахи в 8 раз и осознав свое превосходство, он прекратил погоню. Какой путь проделал Ахиллес с начала погони, если его скорость в 15 раз больше скорости черепахи, причем движение Ахиллеса и черепахи происходило по одной прямой?

3.24. а) Автобус проехал первую часть пути из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 370 км, со скоростью 80 км/ч, а на второй части пути вынужден был снизить скорость до 40 км/ч из-за ремонта дороги. На обратном пути из B в A скорость на ремонтируемом участке дороги составляла 30 км/ч, а на остальной части пути — 90 км/ч. Известно, что обратный путь из B в A автобус проехал на 25 минут быстрее, чем из A в B . Найдите время движения по маршруту из A в B .

б) Из пункта A в пункт B автомобиль доехал за 5 часов, двигаясь в пределах населенных пунктов со скоростью 60 км/ч, а по шоссе вне населенных пунктов — со скоростью 80 км/ч. Обратный путь из B в A занял 4 часа 36 минут. При этом в пределах населенных пунктов автомобиль двигался со скоростью 50 км/ч, а по шоссе — 90 км/ч. Каково расстояние между пунктами A и B ?

3.25. Из пункта A в пункт C , находящийся на расстоянии 20 км от A , выехал грузовик. Одновременно с ним из пункта B , расположенного между A и C на расстоянии 15 км от A , в пункт C вышел пешеход, а из C навстречу им выехал автобус. За какое время грузовик догнал пешехода, если известно, что это произошло через полчаса после встречи грузовика с автобусом, а пешеход до встречи с автобусом находился в пути втрое меньше времени, чем грузовик до своей встречи с автобусом?

3.26. Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B , расположенных на расстоянии 120 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C . Если бы один из них уменьшил свою скорость на 12 км/ч, а другой — на 9 км/ч, то они также прибыли бы одновременно на станцию C , но на 2 часа позже. Найдите скорости поездов.

3.27. Путь из села в город идет сначала по грунтовой

дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 6 часов утра выехал мотоциклист. Одновременно с ним из города в село выехал автомобилист. Мотоциклист двигался по шоссе быстрее чем по грунтовой дороге в $1\frac{1}{2}$ раза, а авто-

мобилист — в $1\frac{2}{3}$ раза (движение обоих по шоссе и по грунтовой дороге считайте равномерным). Они встретились в 10 часов 30 минут, мотоциклист приехал в город в 14 часов, а автомобилист приехал в село в 16 часов 30 минут. Определите, сможет ли мотоциклист приехать в город до 14 часов 30 минут, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью?

3.28. Два мотоциклиста стартовали по очереди из одной точки стадиона в гонке на 30 кругов. Второй мотоциклист начал движение, когда первый прошел $1/2$ круга. Один из зрителей вышел со стадиона, когда мотоциклисты были рядом и, вернувшись через 4 минуты, увидел, что мотоциклисты снова рядом. Если бы после 14 кругов первый мотоциклист увеличил скорость в 4 раза, а второй после 12 кругов — в 2 раза, то они финишировали бы одновременно. Определите, с какой разницей во времени финишировали мотоциклисты, если пришедший первым проехал в минуту больше 5 кругов.

3.29. Два судна движутся прямолинейно и равномерно в один и тот же порт. В начальный момент положения судов и порта образуют равносторонний треугольник. После того как второе судно прошло 80 км, указанный треугольник стал прямоугольным. В момент прибытия первого судна в порт второму остается пройти 120 км. Определите расстояние между судами в начальный момент времени.

3.30. а) Две реки с прямолинейными руслами и одинаковой скоростью течения впадают в одном и том же месте в озеро, образуя между собой угол 60° . От двух причалов, расположенных на разных реках и отстоящих друг от друга на расстояние 28 км, одновременно вышли байдарка и лодка, скорости которых в стоячей воде соответственно равны 10 км/ч и 3 км/ч. Байдарка достигла озера через 2 часа, а лодка — через 4 часа. Найдите скорость течения рек.

б) Из двух пунктов A и B , находящихся друг от друга на расстоянии 120 км, по прямолинейным дорогам, сходящимся в пункте C под углом 60° , одновременно выехали грузовик и автобус соответственно со скоростями 40 км/ч и 60 км/ч. Автобус прибыл в пункт C на 1 час раньше грузовика. Найдите время движения автобуса.

3.31. Два скрепера разной мощности, работая вместе, могут выполнить работу за 6 часов. Если бы первый проработал 4 часа, а затем второй 6 часов, то они выполнили

бы 80 % всей работы. За сколько часов каждый скрепер, работая отдельно, может выполнить всю работу?

3.32. Бригада трактористов вспахала 300 га земли. Если бы в бригаде было на 3 трактора больше, она бы закончила работу на 6 дней раньше. Сколько тракторов было в бригаде, если один трактор обрабатывал 15 га в день?

3.33. Бассейн можно наполнить водой с помощью двух насосов, если первый работает 4 минуты, а второй — 3 минуты. Время наполнения бассейна с помощью одного первого насоса на 3 минуты меньше, чем с помощью одного второго. Каковы эти времена?

3.34. На предприятии работают 3 машинистки разной квалификации. Первая печатает в час на 2 листа больше, чем вторая, у третьей на печатание листа уходит на 4 минуты больше, чем у первой и в $\frac{4}{3}$ раза больше времени, чем у второй. Сколько листов в час печатает первая машинистка?

3.35. Бригада лесорубов заготавливает в каждый очередной день на одно и то же количество древесины больше, чем за предыдущий день работы. Известно, что за 1-й, 5-й и 6-й дни работы бригада заготовила в сумме 72 м³ древесины. Сколько древесины бригада заготовила за первые семь дней работы?

3.36. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того, как первый проработал 7 часов, а второй 4 часа, оказалось, что они выполнили $\frac{5}{9}$ всей работы. Проработав совместно еще 4 часа, они установили, что им остается выполнить $\frac{11}{18}$ всей работы. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, мог бы выполнить всю работу?

3.37. Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе вспахивают за 6 дней, а первая и третья вместе — за 8 дней. Во сколько раз больше площадь, вспахиваемая за день второй бригадой, по сравнению с площадью, вспахиваемой за день третьей бригадой?

3.38. а) Две бригады трактористов одновременно начали пахать два участка земли, причем участок второй бригады вдвое больше участка первой. Во второй бригаде было на 10 трактористов больше, чем в первой. Когда первая бригада еще работала, вторая уже вспахала свой участок. Какое наибольшее число трактористов могло быть в первой бригаде, если все трактористы работали с одинаковой производительностью?

б) Два бассейна одновременно начали наполнять водой. Вода подавалась с помощью насосов одинаковой мощности. При этом число насосов, подававших воду в первый бассейн, было на 5 меньше числа насосов, подававших воду во второй бассейн. Емкость первого бассейна вдвое

меньше емкости второго бассейна. Когда второй бассейн был полон, наполнение первого еще не закончилось. Какое наибольшее число насосов могло подавать воду в первый бассейн?

3.39. К бассейну объемом 1200 м^3 подведены две трубы, подающая и отводящая. Если открыть одновременно две трубы, то бассейн заполнится за 60 часов. Если же открыта только подающая труба, то заполнение бассейна водой продолжается на два часа меньше, чем его освобождение от воды. Сколько воды в час пропускает каждая труба?

3.40. Уборку урожая с участка начал один комбайн. Через 2 часа к нему присоединился другой комбайн, и после 8 часов работы вместе они собрали 80 % урожая. За сколько часов мог бы собрать урожай с участка каждый комбайн, если известно, что первому на это необходимо на 5 часов больше, чем второму?

3.41. Бак имеет форму прямоугольного параллелепипеда. К нему подведены три трубы: одна сверху, одна снизу, а одна — в центре боковой грани. В трубу сверху вода вливается, а через две остальные выливается. Если открыть только нижнюю трубу, то полный бак становится пустым за 8 часов. Если открыть и нижнюю и боковую трубы, то полный бак опустошается за 7 часов. Если же в пустом баке открыть все три трубы, то он наполняется за 5 часов 24 минуты. За какое время заполнится пустой бак, если открыть только верхнюю трубу?

3.42. Для вспашки трех совершенно одинаковых полей выделено три трактора различной производительности. Каждое поле вспахивается одним трактором. Первый трактор начал работу на $1/2$ часа раньше второго, а третий — на $1/3$ часа позже второго. Вспашка полей велась тракторами равномерно и без остановок. Через некоторое время после начала работы третьим трактором оказалось, что к этому моменту каждый из тракторов выполнил одинаковую часть запланированной работы. Через сколько минут после завершения работы вторым трактором закончил работу первый, если третий выполнил всю работу на 12 минут раньше, чем второй?

3.43. а) Первая машинистка должна отпечатать 40 страниц текста, вторая — 50 страниц. Начали работу они одновременно. Вторая машинистка, которая печатает на 2 страницы в час больше первой, после двух часов работы сделала перерыв на 30 минут, после чего стала печатать еще на 2 страницы в час больше, чем до перерыва. В итоге машинистки закончили работу одновременно. Найдите скорость печатания первой машинистки. В каких пределах может меняться скорость печатания первой машинистки, чтобы, при всех прочих условиях, вторая машинистка закончила работу не позже первой?

б) Первый экскаватор должен выкопать 72 метра кана-

вы, а второй — 60 метров. Производительность второго экскаватора на 2 м/ч меньше производительности первого. Первый экскаватор приступил к работе на час позже второго и, проработав 5 часов, сделал перерыв на 48 мин. Увеличив после этого свою производительность на 2 м/ч, он закончил работу одновременно со вторым, который работал без перерывов и с одной и той же производительностью. Найдите первоначальную производительность первого экскаватора. В каких пределах может меняться первоначальная производительность первого экскаватора, чтобы, при тех же условиях работы, он выполнил свое задание не позже второго?

3.44. К раствору, который содержит 40 г соли, добавили 200 г воды, после чего его концентрация уменьшилась на 10 %. Сколько воды содержал раствор и какая была его концентрация?

3.45. Смешали 30 %-й раствор соляной кислоты с 10 %-м и получили 600 г 15 %-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

3.46. Имеются два сплава, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40 % олова, а второй — 26 % меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Определите, сколько килограммов олова содержится в получившемся новом сплаве.

3.47. Имеется два куска сплава серебра и меди. Один из них содержит 81 % меди, другой — 95 %. В каком отношении нужно брать сплавы от обоих кусков, чтобы получить новый сплав, содержащий 87 % меди?

3.48. Имеются три куска сплава меди с никелем в отношениях 2:1, 3:1 и 5:1 по массе. Из них сплавлен кусок массой 12 кг с отношением меди к никелю 4:1. Найдите массу каждого исходного куска, если масса первого была вдвое больше массы второго.

3.49. Свежие грибы содержат по массе 90 % воды, а сухие — 12 % воды. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих грибов?

3.50. Имеются два сплава, состоящие из железа, никеля и хрома. Процентное содержание хрома в первом сплаве в 5 раз больше процентного содержания никеля во втором сплаве. Кусок первого сплава массой 200 г сплавляли с куском второго сплава массой 400 г и получили сплав, содержащий q % никеля. Сколько граммов железа содержит новый сплав, если известно, что первый сплав содержит 30 % никеля, а второй сплав содержит 40 % железа?

3.51. Из колбы, в которой имеется 80 г 10 %-го раствора поваренной соли, отливают некоторую часть раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное

содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 2 %. Определите, какое количество раствора отлили из колбы в пробирку.

3.52. 40 кг раствора соли разлили в два сосуда так, что во втором сосуде чистой соли оказалось на 2 кг больше, чем в первом сосуде. Если во второй сосуд добавить 1 кг соли, то количество соли в нем будет в 2 раза больше, чем в первом. Найдите массу раствора, находящегося в первом сосуде.

3.53. В первом и втором сосудах содержится кислота: в первом сосуде 5 л 30 %-го раствора, во втором сосуде 7 л 40 %-го раствора. Этими растворами наполнен 10-литровый сосуд так, что концентрация кислоты в нем оказалась равной C %. Остальную кислоту слили в четвертый сосуд. В каком из двух сосудов, в третьем или в четвертом, концентрация кислоты больше?

3.54. От двух сплавов массой 7 и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого сплава, сплавляли с остатком второго сплава, а кусок, отрезанный от второго сплава, сплавляли с остатком первого сплава. Определите массу каждого из отрезанных кусков, если новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния.

3.55. В баке находится 100 литров смеси кислоты с водой. Из бака отлили часть смеси и добавили равное по объему количество воды, которое на 10 литров превышает первоначальное количество кислоты в смеси. Затем снова отлили такое же количество смеси, как в первый раз, в результате чего количество кислоты в баке уменьшилось в четыре раза по сравнению с количеством ее в исходной смеси. Определите количество воды в исходной смеси.

3.56. Вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года $\frac{5}{6}$ некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 670 денежным единицам, к концу следующего года — 749 денежным единицам. Если бы первоначально $\frac{5}{6}$ исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 710 денежным единицам. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определите величину вклада по истечении двух лет.

3.57. Партия телевизоров проходит испытание на долговечность. После первого года работы отказало 15 теле-

визоров, а после второго — еще 4. Сколько телевизоров было исправно после первого года работы, если известно, что отношение числа телевизоров, исправных к концу второго года к числу телевизоров, исправных к началу года, на 8,75 % больше, чем такое же отношение, составленное для первого года испытаний?

3.58. Для проведения эксперимента по выращиванию биомассы были использованы три пробирки. После эксперимента оказалось, что в первой и второй пробирках вместе биомассы в два раза больше чем в третьей, а во второй и третьей вместе в три раза больше чем в первой. В какой из пробирок биомассы первоначально было меньше, если ее прирост в первой пробирке составил 40 %, а во второй — 60 % и в третьей — 50 %?

3.59. Имеется три сплава. Первый содержит 30 % никеля и 70 % марганца, второй 10 % марганца и 90 % меди, третий 15 % никеля, 25 % марганца и 60 % меди. Из них приготовлен сплав, масса которого 15 кг, содержащий 40 % меди и 42 % марганца. Какое количество первого, второго и третьего сплава взяли для этого?

3.60. Двое рабочих изготовили по 60 одинаковых деталей. Первые 30 деталей каждый из них делал с постоянной производительностью, которая у второго рабочего была на 20 % выше. Затем первый рабочий стал делать больше на 2 детали в час, а второй — на 3 детали в час. Первый рабочий затратил на выполнение всего задания не менее 5 часов 30 минут, а второй — не более 4 часов 30 минут. Сколько деталей в час делал второй рабочий при выполнении второй половины задания?

3.61. Две колонны грузовых автомобилей перевозили урожай двух колхозов, причем урожай второго колхоза был в три раза меньше, чем урожай первого. В первой колонне было на 8 автомобилей больше, чем во второй колонне. Сделав каждый по одному рейсу, автомобили первой колонны перевезли весь урожай первого колхоза. Автомобили второй колонны, сделав каждый по одному рейсу, не смогли перевезти весь урожай второго колхоза. Какое наибольшее число автомобилей могло быть во второй колонне, если грузоподъемность всех автомобилей одинакова?

3.62. В коробке лежит 40 карандашей. Число синих карандашей в 4 раза больше числа зеленых, а число красных карандашей делится на число зеленых. Если в коробку добавить 22 синих карандаша, то их станет в 5 раз больше красных. Сколько лежит в коробке карандашей цвета, отличного от красного, синего и зеленого?

3.63. Бригаде водителей тяжелых грузовиков сообщили, что им предстоит перевезти груз от 170 до 195 т. Однако два грузовика оказались поломанными в пути, поэтому чтобы доставить весь груз, пришлось остальные

грузовики догрузить по одной тонне. Сколько тонн груза было перевезено, если все грузовики были одинаково загружены?

3.64 Дед старше своего внука в 5 раз. Если бы он был моложе на 16 лет, то он был бы старше своей внучки в 4 раза. Сколько лет деду, внуку и внучке, если про внука и внучку можно сказать: отношение их возрастов есть число целое?

3.65. Для размещения комплекта журналов достаточно купить 13 стандартных полок. Однако в продаже оказались полки, на которых умещается на 7 журналов меньше, чем на стандартных, поэтому пришлось купить 27 полок, и в результате осталось свободное место для 3 журналов. Сколько журналов в комплекте?

3.66. Некто решил накопить деньги на цветной телевизор, который может стоить от 550 до 640 рублей. Для этого он откладывал каждый месяц одну и ту же сумму денег. После того как покупка была сделана, он рассудил, что если бы он откладывал ежемесячно на 5 рублей меньше, то копить пришлось бы всего на 4 месяца дольше. Сколько стоил телевизор?

3.67. Три числа x , y , z образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а числа x , $2y$, $3z$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, отличный от единицы.

3.68. Второй член убывающей арифметической прогрессии равен 10. Если первый член прогрессии увеличить на 2, второй оставить без изменений, а третий увеличить на 3, то полученные три числа будут последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите сумму первых четырех членов арифметической прогрессии.

3.69. В геометрической прогрессии первый член равен 1, а сумма первых пяти членов в восемь раз превосходит сумму обратных величин этих же членов. Найдите знаменатель прогрессии.

3.70. Сумма пяти начальных членов арифметической прогрессии меньше суммы ее последующих пяти членов на 50. На сколько десятый член прогрессии больше ее второго члена?

3.71. Найдите сумму первых пятнадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма четвертого, пятого, седьмого и шестнадцатого членов этой прогрессии равна 32.

3.72. Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии, если известно, что сумма третьего, седьмого, четырнадцатого и восемнадцатого членов этой прогрессии равна 10.

3.73. Разность между третьим и пятым членами геометрической прогрессии равна $16/81$. Третий член равен $2/9$.

Найдите ее четвертый член, если известно, что знаменатель прогрессии положителен.

3.74. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно число так, что все три числа образуют арифметическую прогрессию. Если средний член этой прогрессии уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найдите неизвестное число.

3.75. Разность между пятым и третьим членами геометрической прогрессии равна квадрату знаменателя прогрессии, а сумма ее первых трех членов равна $-7/3$. Найдите знаменатель прогрессии, если известно, что он положителен.

3.76. Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел (в том же порядке) составляют геометрическую прогрессию. Найдите a_1, a_2, a_3 , если известно, что $a_1 + a_2 + a_3 = 21$.

3.77. Сумма третьего и пятого членов геометрической прогрессии равна 10, а сумма ее второго и четвертого членов равна $10/3$. Найдите четвертый член прогрессии.

3.78. Найдите отношение третьего члена убывающей геометрической прогрессии к пятнадцатому ее члену, если сумма двенадцати членов этой прогрессии, начиная с тринадцатого, составляет 40 % суммы ее начальных двенадцати членов.

3.79. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 45, а сумма первых шести членов равна 189. Первый член арифметической прогрессии, все члены которой являются натуральными числами, равен первому члену геометрической прогрессии, сумма первых 11 членов арифметической прогрессии меньше 260, а сумма первых 19 членов больше 710. Найдите пятый член арифметической прогрессии.

3.80. а) Числа a_1, a_2, \dots, a_{21} образуют арифметическую прогрессию. Известно, что сумма членов этой прогрессии с нечетными номерами на 15 больше суммы членов с четными номерами. Найдите a_{12} , если $a_{20} = 3a_9$.

б) Числа b_1, b_2, \dots, b_{19} образуют арифметическую прогрессию. Известно, что удвоенная сумма членов этой прогрессии с четными номерами на 10 больше суммы всех членов. Найдите b_{13} , если $b_3 = 2b_4$.

3.81. Числа m, n и p образуют геометрическую прогрессию, а числа $m + n, n + p, p + m$ — арифметическую. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

3.82. Три отличные от нуля числа образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел, взятые в том же порядке, образуют геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

3.83. К двузначному числу слева и справа приписали по 1. В результате получилось число в 23 раза больше первоначального. Определите это число.

3.84. Четырехзначное натуральное число A оканчивается цифрой 1. Двухзначное число, образованное цифрами тысяч и сотен, цифра десятков и цифра единиц числа A представляют три последовательных члена арифметической прогрессии. Из всех чисел A , удовлетворяющих указанным условиям, найдите то, у которого разность между цифрой десятков и цифрой сотен имеет наименьшее возможное значение.

3.85. Найдите все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:

- первая цифра числа в 3 раза меньше последней его цифры,

- сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой второй и третьей его цифр, делится на 8 без остатка.

3.86. Сумма цифр некоторого трехзначного числа равна 11. Если из числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, вычесть 594, то получится искомое число. Найдите это трехзначное число, если известно, что сумма трех попарных произведений цифр этого числа равна 31.

3.87. При перемножении двух натуральных чисел, разность которых равна 10, была допущена ошибка: цифра сотен в произведении была увеличена на 2. При делении полученного (неверного) произведения на меньший из множителей получилось в частном 50 и в остатке 25. Найдите множители.

3.88. Сумма всех трехзначных чисел, составленных из трех различных отличных от нуля цифр k , l и m , больше 2700, но не превосходит 2900. Каждая из указанных цифр встречается в записи числа один раз. Найдите число \overline{klm} , если известно, что оно четное и наибольшее из всех трехзначных чисел, удовлетворяющих условиям задачи.

3.89. а) Натуральные числа k , l , m , взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2835 и 2646 делятся без остатка на l и m соответственно. Найдите числа k , l и m , если известно, что при указанных условиях сумма $k + l + m$ максимальна.

б) Натуральные числа a , b , c , взятые в указанном порядке, образуют возрастающую геометрическую прогрессию, знаменатель которой является целым числом. Числа 2240 и 4312 делятся без остатка на b и c соответственно. Найдите числа a , b и c , если известно, что при указанных условиях сумма $a + b + c$ максимальна.

3.90. Найдите трехзначное число, цифры которого составляют геометрическую прогрессию с суммой 19, и цифра сотен которого на 5 больше цифры единиц.

3.91. При подведении итогов соревнования вычислено,

что процент числа членов бригады, перевыполнивших план, заключен в пределах от 92,5 % до 93,5 %. Определите минимально возможное число членов такой бригады.

3.92. а) В саду приготовили N ям для посадки деревьев. После того как посадили имеющиеся яблони, груши и сливы, оказалось, что было использовано менее трети ям, при этом груш было посажено на 6 штук больше, чем яблонь. Если бы яблонь посадили в три раза больше, то остались бы не использованными 59 ям. Сколько ям для посадки было подготовлено, если известно, что на оставшиеся места посадили персиковые деревья и их оказалось в три раза больше, чем слив, и число посаженных деревьев четное?

б) В магазине имеются три вида наборов игрушек: металлических, пластмассовых и мягких. Детский сад купил по одному набору металлических и пластмассовых игрушек и 4 набора мягких, при этом количество игрушек совпало с числом детей в детском саду. Если бы было куплено 4 набора металлических и один набор мягких игрушек, то 57 детям игрушек бы не досталось. Количество игрушек, составляющих 4 набора пластмассовых и один мягких, на 41 меньше числа детей. Сколько детей было в саду, если, купив по три набора игрушек каждого вида, детский сад не обеспечил бы всех детей игрушками?

Глава 4

Показательные

и логарифмические уравнения

Свойства показательной и логарифмической функций

4.1. Какое из положительных чисел a и b больше, если

а) $1,2^a > 1,2^b$; б) $0,8^a > 0,8^b$; в) $\left[\frac{1}{5}\right]^a < \left[\frac{1}{5}\right]^b$;

г) $\log_{1,01} a < \log_{1,01} b$; д) $\log_{\frac{1}{2}} a < \log_{\frac{1}{2}} b$;

е) $2^a = 3^b$; ж) $\log_a 2 = \log_b 3$.

4.2. Найдите значения числовых выражений

а) $2^{\log_{32} 5}$; б) $3^{\log \sqrt[3]{3^2}}$; в) $\log_{\sqrt{3}} 27$; г) $\log_{\frac{1}{16}} 32$;

д) $\log_{\sqrt[4]{6}} 3 \cdot \log_3 36$; е) $\frac{\log_5 30}{\log_{30} 5} - \frac{\log_5 150}{\log_6 5}$;
 ж) $\frac{\log_5 30}{\log_{150} 5} - \frac{\log_5 750}{\log_6 5}$; з) $\log_2 \log_3 \sqrt[4]{8 \sqrt[3]{3}}$.

4.3. Докажите тождества

а) $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$; б) $a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}}$.

4.4. Пусть $\log_6 3 = a$. Вычислите

а) $\log_6 2$; б) $\log_{24} 48$; в) $\log_3 \sqrt[4]{6}$.

4.5. а) Найдите $\log_5 3,38$, если $\lg 2 = a$, $\lg 13 = b$;
 б) найдите $\log_{275} 60$, если $\log_{12} 5 = a$, $\log_{12} 11 = b$.

4.6. Пусть $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$. Найдите

а) $\log_{60} 30$; б) $\log_{300} 75$.

4.7. Известно, что

а) $\log_p q = \sqrt{11}$; вычислите $\log_{p/\sqrt[3]{q}} \sqrt[3]{q^5 p^2}$;

б) $\log_p q = \sqrt{5}$; вычислите $\log_{\sqrt{pq} \sqrt[3]{p}} \frac{q}{p}$.

4.8. Сравните числа

а) 2^{300} и 3^{200} ; б) $\log_2 3$ и $3/2$;
 в) $1,6$ и $\log_2 3$; г) $\lg 2$ и $0,3$.

4.9. Определите, какое из чисел больше:

а) $2\log_{1/2} 1/5$ или $3\log_8 26$; б) $2\log_3 4$ или $3\log_{1/27} 1/17$;
 в) $2\log_2 5$ или $3\log_{1/8} 1/23$; г) $2^{\log_5 3}$ или $3^{\log_5 2} + 0,01$;
 д) $\log_2 3$ или $\log_3 4$; е) $\log_2 5$ или $\log_3 11$;
 ж)* $\log_2 5$ или $\log_3 12$; з)* $\log_2 5$ или $\log_3 13$.

4.10. Сравните без помощи таблиц и калькулятора

а) $\log_{20} 75$ и $\log_8 25$; б) $\log_{189} 1323$ и $\log_{63} 147$.

4.11. Докажите, что при всех $n > 1$ имеет место неравенство

$$\log_n (n + 1) > \log_{n+1} (n + 2).$$

Показательные уравнения

Решите уравнения:

$$4.12. \text{ а) } 4^x = 2^{x^2 - 3}; \quad \text{б) } \left[\frac{2}{7} \right]^{3x - 4} = \left[\frac{49}{4} \right]^{x - 1};$$

$$\text{в) } \left[\frac{4}{9} \right]^x \cdot \left[\frac{27}{8} \right]^{x - 1} = \frac{\lg 4}{\lg 8}.$$

$$4.13. \text{ а) } 7^{3x} + 9 \cdot 5^{2x} = 5^{2x} + 9 \cdot 7^{3x}.$$

$$\text{б) } 3 \cdot 2^{2x} + 3^{2x + 3} = 6 \cdot 4^{x + 1} - \frac{1}{2} 9^{x + 1};$$

$$\text{в) } 8^{4(x^3 + 8)} = 16^{7(x^2 + 2x)}; \quad \text{г) } 32^{3(x^3 - 8)} = 8^{19(2x - x^2)}.$$

$$4.14. (36^{5x \operatorname{tg} x}) x 6^{\pi^2 \operatorname{tg} x} = 6^{7\pi x \operatorname{tg} x}.$$

$$4.15. \text{ а) } 4^x - 10 \cdot 2^{x - 1} = 24; \quad \text{б) } \frac{3}{2^3 - x} = 4^{x - 4} - 7;$$

$$\text{в) } 7^x - 14 \cdot 7^{-x} = 3^{\log_3 2} + 3; \quad \text{г) } 3 \cdot 9^{x + 1} - 6 \cdot 3^x - 1 = 0.$$

$$4.16. 2^{12x - 1} - 4^{6x - 1} + 8^{4x - 1} = 1536.$$

$$4.17. \frac{9}{17(4 \cdot 2^x - 3)} - \frac{1}{4 \cdot 2^x - 1} + \frac{2}{17(2^x - 5)} = 0.$$

$$4.18. 2^{2x}(2^x - 6)^2 - (2^x - 3)^2 = 21.$$

$$4.19. 4^{\sqrt{3x^2 - 2x} + 1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2 - 2x}}.$$

$$4.20. ({}^3\sqrt{3 + 2\sqrt{2}})^x + ({}^3\sqrt{3 - 2\sqrt{2}})^x = 6.$$

$$4.21. \text{ а) } 4^{\sqrt{x} + 1,5} - 13 \cdot 2^{\frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}} + 20 = 0;$$

$$\text{б) } 9^{\sqrt{x} + 0,5} - 39 \cdot 3^{\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}} + 12 = 0.$$

$$4.22. \text{ а) } 3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0;$$

$$\text{б) } 5 \cdot 4^x - 11 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0;$$

$$\text{в) } 3 \cdot 4^x - 8 \cdot 14^x + 4 \cdot 49^x = 0; \quad \text{г) } 4 \cdot 9^x - 9 \cdot 15^x + 2 \cdot 25^x = 0;$$

$$\text{д) } 3^{2x^2 - 6x + 3} + 6^{x^2 - 3x + 1} = 2^{2x^2 - 6x + 3}.$$

$$4.23. 2^{x^2 - 3x + 3} = 3^{x - 2}.$$

$$4.24. \text{ а) } 3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 36; \quad \text{ б) } 2^x \cdot 3^{\frac{2x+1}{3x-2}} = 54.$$

$$4.25. 3^{2x+1} = 3^{x+2} + \sqrt{1 - 6 \cdot 3^x + 3^{2(x+1)}}.$$

$$4.26. \text{ а) } 25^{|1-2x|} = 5^4 - 3x; \quad \text{ б) } 4^{|x-1|} = 3^{x+1}.$$

$$4.27. 2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1.$$

$$4.28. \text{ а) } |x^2 - x + 1|^{\frac{x^2+1}{2}} = |x^2 - x + 1|^{2x+3};$$

$$\text{ б) } |x-1|^{x^2+x-2} = |x-1|^{3x+10}.$$

$$4.29. \text{ а) } 3^x + 4^x = 5^x; \quad \text{ б) } 4^{\frac{1}{x}} - 1 = 3^{2x-1};$$

$$\text{ в) } (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x + (\sqrt{2 + \sqrt{3}})^x = 2^x.$$

Логарифмические уравнения

Решите уравнения:

$$4.30. \text{ а) } \log_3(x-8) = 2 - \log_3 x; \quad \text{ б) } \log_{x+2} 3 = 2;$$

$$\text{ в) } \log_3(x-2) + \log_3(x+2) = \log_3 5;$$

$$\text{ г) } \log_{2x+2}(2x^2 - 8x + 6) = 2.$$

$$4.31. \text{ а) } \log_{\sqrt{2}}(x^2 + 2x - 1) - \log_{\sqrt{2}} x = 2;$$

$$\text{ б) } \lg(x-2) - \frac{1}{2} \lg(3x-6) = 1 - \lg 5;$$

$$\text{ в) } 2\log_7(x-2) = \log_7(x-10)^2 - 2;$$

$$\text{ г) } \log_2(4x-2) = 7 - \log_2(2x+5);$$

$$\text{ д) } \log_3 x + \log_3(x+4) = \frac{1}{\log_5 3}.$$

$$4.32. \text{ а) } 4\log_{25} 5x = 5 - \log_5^2 x; \quad \text{ б) } \sqrt{\log_2 x} + \sqrt{\log_x 2} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

$$4.33. \text{ а) } \log_4(x^2 - 4x + 2) - \log_4(x^2 - 6x + 5) = -\frac{1}{2};$$

$$\text{ б) } \log_5(x^2 - \sqrt{5}x + \frac{1}{4}) - \log_5(\frac{5}{4} - x^2) = -1.$$

- 4.34. $\log_{x+2} \log_2 \log_{x+3} (11x^2 + 46x + 48) = 0$.
- 4.35. $\sqrt{\log_3 (9x - 3)} = \log_3 (x - \frac{1}{3})$.
- 4.36. $\log_{49} (2x^2 + x - 5) + \log_{1/7} (1 + x) = 0$.
- 4.37. $10 + \frac{3}{4 \log_{25} x - 1} - \frac{13}{6 \log_5 x - 5} = 0$.
- 4.38. $\log_5 -x^2 (2x^2 - 8x - 2) = 1 + \log_5 -x^2 \cdot 2$.
- 4.39. $(3 \log_{27} 27x) \log_3 x = 2(\log_3 x + 1)$.
- 4.40. а) $7^{2(\log_{11} x)^2} + 4 = 6 \cdot 7^{(\log_{11} x)^2}$;
 б) $5^{2(\log_3 x)^2} - 6 \cdot 5^{(\log_3 x)^2} + 1 = 0$.
- 4.41. а) $(x^2 - 7x + 6)(\log_{\frac{x}{6}} (\frac{4}{9} x^2) + 2) = 0$;
 б) $(x^2 - 7x + 10)(\log_{\frac{x}{2}} (8x) + 3) = 0$.
- 4.42. $\log_{\sqrt{5}} (4^x - 6) - \log_{\sqrt{5}} (2^x - 2) = 2$.
- 4.43. $\log_{1+x} (2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3$.
- 4.44. а) $\log_2 x + \log_3 x = \log_2 x \cdot \log_3 x$;
 б) $\log_2^2 x + \log_3^2 x = \log_2^3 x + \log_3^3 x$.
- 4.45. $\log_{\sqrt{3}}^2 x + 5 \log_3 x - \log_{\frac{1}{3}} x = 4$.
- 4.46. $x^{\lg 3} + 3^{\lg x} = 54$.
- 4.47. $\log_2 \left[\frac{x-1}{4x+3} \right] = 3 + \log_{16} x^4 - \log_4 (x-3)^2$.
- 4.48. $\log_6 \left[6^{\frac{1-2x}{3x-2}} + \frac{23}{6} \right] = \log_6 4 + \frac{1-x}{3x-2}$.
- 4.49. $10^{(6 \log_x 10)^2 - 13 \lg x} \cdot x^{\lg x} = 1$.
- 4.50. $\frac{\log_3 \left[\frac{3}{x} \right]}{\log_x 2} - \log_3 \left[\frac{x^3}{\sqrt{3}} \right] = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$.

$$4.51. \text{ a) } 2^{\sqrt{\log_2 3}} = 3^{\sqrt{\log_9 4x - 0,75}};$$

$$6) 5^{\sqrt{(\log_3 x + \log_5 9)\log_5 3}} = 3^{\sqrt{\log_3 1,8}}.$$

$$4.52. \log_{4x} 2x = \log_{2x} x^2 \cdot \log_{2x^2} 4.$$

$$4.53. \text{ a) } \frac{x}{18} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}; \quad 6) \frac{9x}{4} = \left(\frac{27}{2}\right)^{\log_x 6};$$

$$\text{в) } 5x^{\log_{15} x} = 3 \cdot 5^{\log_{15} x^2}.$$

$$4.54. x^2 + (x - 3)\log_2 x = 4x - 3.$$

Системы логарифмических и показательных уравнений

Решите системы уравнений:

$$4.55. \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = \frac{1}{9}, \\ \frac{1}{9} 3^y = 3^x. \end{cases}$$

$$4.56. \begin{cases} 35 \log_4^2 x + 36 \log_3^2 y = 99, \\ 7 \log_{\frac{1}{4}} x - 6 \log_{\frac{1}{3}} y = 1. \end{cases}$$

$$4.57. \text{ a) } \begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 3, \\ 2x + 5y = 52; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x + y = 30, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$$

$$4.58. \begin{cases} \log_x y + \log_y x = \frac{5}{2}, \\ 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

$$4.59. \begin{cases} 35 \cdot 64^x + 81 \log_2^2 z = 99, \\ -7 \cdot 8^x + 9 \log_2 z = 1. \end{cases}$$

$$4.60. \begin{cases} 2 \log_x 8 + 3y = 24, \\ -2 \log_x^3 0,5 + y = 8. \end{cases}$$

$$4.61. \begin{cases} \log_3 (x^2 + 1) - \log_3 (y - 2) = 0, \\ \log_2 (x^2 - 2y^2 + 10y - 7) = 2. \end{cases}$$

$$4.62. \begin{cases} 9 \cdot 9^y + 4 \log_4^2 z = 5, \\ 3 \cdot 3^y \cdot \log_4 z = 1. \end{cases}$$

$$4.63. \begin{cases} xy = 27, \\ 2(2 \log_{y^2} x + \log_{\frac{1}{x}} y) = 3. \end{cases}$$

$$4.64. \text{ а) } \begin{cases} 27 \cdot 3^{2x-y} + 3^{x^2} = 4\sqrt{3}, \\ \lg(y-4x) = 2\lg(2+2x-y) - \lg y; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 8 \cdot 2^{-x-2y} + 2^{y^2} = 3\sqrt{2}, \\ \lg(x+4y) = 2\lg(2-x-2y) - \lg x. \end{cases}$$

$$4.65. \text{ а) } \begin{cases} 1 + \log_3(x+y) \cdot \log_2 3 = 2\log_4 7 - \log_2 x, \\ \log_2(xy+1) = 2\log_4 y + \log_{\frac{1}{8}}(x-2y)^3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \log_4 x \cdot \log_3 4 = \log_3 5 + \log_{\frac{1}{3}}(2y+4x), \\ \log_3(x-y) = \log_{\frac{1}{3}}\left[\frac{1}{y}\right] - 3\log_{27}(2+xy). \end{cases}$$

$$4.66. \text{ а) } \begin{cases} x^y = y^x, \\ 3^x = 2^y; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^y = y^x, \\ x^3 = y^2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2 y = 1; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} xy = y^x, \\ x^3 = y^2. \end{cases}$$

Задачи с параметрами

Решите уравнения:

$$4.67. \text{ а) } 4^x - 2a(a+1)2^{x-1} + a^3 = 0;$$

$$\text{б) } 25^x + a^2(a-1)5^x - a^5 = 0.$$

$$4.68. \text{ а) } \log_{a^2} - x^2((ax)^2 - 1) = 1;$$

$$\text{б) } \log_a(ax) \log_x(ax) = \log_{a^2} \frac{1}{a}.$$

$$4.69. \text{ а) } \sqrt{4^x - 6 \cdot 2^x + 1} = 2^x - a;$$

$$\text{б) } \log_{1/3} (9^x + a) + \log_2 (2 \cdot 3^x) = 0.$$

$$4.70. \text{ а) } \log_3 (31 - |x^2 - 6x + 5|) = c;$$

$$\text{б) } -\log_5 (2 - |x - b|) = \log_{0,2} (5 - x).$$

$$4.71. \text{ а) } \log_{100} x^2 = (\log_{\sqrt{x}} 10)(\lg 10a - |\lg \frac{x}{a}|);$$

$$\text{б) } \log_a x + (\log_{\sqrt{x}} a) |a + \log_a x| = a \log_x a.$$

4.72. Найдите все значения x , удовлетворяющие уравнению

$$\text{а) } \log_{x + a^2 + 1} (a^2 x + 2) = 2 \log_{7 + 2x} (5 - \sqrt{6 - 2x});$$

$$\text{б) } 2 \log_{3a^2 + 2} (7 - \sqrt{34 + x}) = \log_{2a^2 + 3} (3 - x)$$

при любом $a \in \mathbb{R}$.

4.73. При каких значениях a уравнение

$$\begin{aligned} \log_{(a-4)(10-a)} (-x^2 + 4x - 3) = \\ = \log_{(a-4)(10-a)} (x - 0,25a - 1)(x - 0,5a - 2) \end{aligned}$$

имеет единственное решение?

4.74. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\begin{aligned} 4^{-|x-a|} \log_{\sqrt{3}} (x^2 - 2x + 3) + \\ + 2^{-x^2 + 2x} \log_{1/3} (2|x-a| + 2) = 0 \end{aligned}$$

имеет ровно три решения.

4.75. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \lg (4 + y) = \lg x, \\ a - y = \frac{1}{2} (x + a)^2 \end{cases}$$

имеет решение.

4.76. Найдите такие значения b , что при любом значении a система

$$\begin{cases} 2(1 + |y|)^b + (a^2 - 2a + 2)^z = 3, \\ zy(z + a - 1) = 2b^2 - 3b + 1 \end{cases}$$

имеет не менее одного решения (y, z) .

4.77. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\text{а) } \begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 3|x| - 2 = 5y + 3x^2 - 5a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Глава 5

Показательные и логарифмические неравенства

Решите неравенства:

$$\text{5.1. а) } 27^x \cdot 3^{1-x} < \frac{1}{3}; \quad \text{б) } 3^{x+4} \cdot 7^{2x+3} \leq 3^{3x+5} \cdot 7^{4x+4};$$

$$\text{в) } (\sqrt{2})^{2x^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{7-6x} > 1; \quad \text{г) } 3^{x-2} < \frac{3}{9^{1/x}};$$

$$\text{д) } 9^x + 3 < 4 \cdot 3^x; \quad \text{е) } 4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0;$$

$$\text{ж) } 3^x - 3^{\frac{1}{2}-x} > \sqrt{3} - 1; \quad \text{з) } 2^{3x-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{2} > 1 + 2^{-3x};$$

$$\text{и) } 9^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 4^{x+1} \leq 0;$$

$$\text{к) } 3^{1/x} - 6^{1/(2x)} - 2^{1+1/x} < 0.$$

$$\text{5.2. а) } \frac{1}{2^x+3} \leq \frac{1}{2^{x+2}-1}; \quad \text{б) } \frac{2}{2^x-4} < \frac{1}{3 \cdot 2^{x+1}-2};$$

$$\text{в) } \frac{1}{3^x-1} > \frac{1}{1-9^{x-1}}; \quad \text{г) } \frac{11 \cdot 3^{x-1}-31}{4 \cdot 9^x - 11 \cdot 3^{x-1} - 5} \geq 5;$$

$$\text{д) } \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+1}}{5 \cdot 3^x - 4 \cdot 5^x} < 1.$$

$$\text{5.3. а) } (2^{x+1} - 3^{x+1})\sqrt{2^{2x} - 2^{x+3} \cdot 3^x + 11 \cdot 3^{2x}} \geq 0;$$

$$\text{б) } \sqrt{2^x - 3} > 2^{x+2} - 15.$$

$$\text{5.4. а) } x^4 + 3^{x+4} \geq x^4 \cdot 3^x + 81;$$

$$6) 2^{x+3} - x^3 \cdot 2^x \leq 16 - 2x^3.$$

$$5.5. \text{ a) } \left[\frac{1}{3} \right]^{|x|} < \left[\frac{1}{9} \right]^{|x+2|};$$

$$6) 25^{x+1} \geq 10 \cdot 32^{|x-1|+1}; \quad \text{b) } 8^x \geq 6 \cdot 9^{|x-1|}.$$

$$5.6. \text{ a) } 5^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} \leq 100; \quad 6) 2^x \cdot 3^{\frac{3x}{2x-1}} \geq 54.$$

$$5.7. \text{ a) } \log_2 (2x+1) < \log_2 (x+1);$$

$$6) \log_{1/7} (x-1) < \log_{1/7} (3-x); \quad \text{b) } 2^{\log_3 (x^2-1)} < 1;$$

$$\text{r) } (0,5)^{\log_5 (x+2)} > 1; \quad \text{д) } \left[\frac{1}{2} \right]^{\log_{1/3} (x-2)} \leq 2.$$

$$5.8. \text{ a) } \log_2 (x-2) - \log_{1/2} (x+3) \leq \log_2 6;$$

$$6) \log_2 (x^2 - x - 6) \leq \log_2 6;$$

$$\text{b) } \log_2 (x^2 - x - 2) \leq \log_2 (3x + 10);$$

$$\text{r) } \log_2 (x^2 - x - 2)^2 \leq 2 \log_2 (3x + 10);$$

$$\text{д) } \log_2 (x^2 - x - 2)^2 \leq \log_2 (3x + 10)^2.$$

$$5.9. \text{ a) } \log_3 (3^x - 8) \leq 2 - x;$$

$$6) \log_2 (2^x - 1) \log_{1/2} (2^{x+1} - 2) > -2.$$

$$5.10. \log_{0,5}^2 x + \log_3 \sqrt[4]{0,5} x > 4.$$

$$5.11. \text{ a) } \log_3 (2x^2 - x) - 1 \leq \log_3 (6x - 3) - \log_3^2 x;$$

$$6) \log_5 (x+2) + \log_2 (x-5) < \log_{25} (x-5)^2;$$

$$\text{b) } \log_5 ((2+x)(x-5)) < \log_{25} (x-5)^2.$$

$$5.12. \text{ a) } \frac{4}{\lg 10x} - \frac{5}{\lg 100x} \geq 0;$$

$$6) \frac{3 \log_{0,5} x}{2 - \log_{0,5} x} \geq 2 \log_{0,5} x + 1;$$

$$\text{b) } \frac{\log_2 \frac{x}{2}}{\log_2 x} - \frac{\log_2 x^2}{\log_2 x - 1} \leq 1;$$

$$\text{r) } \frac{\log_{1/5} \left[\frac{1}{x^{15}} \right] - 2}{\log_{125} x^{12}} \leq 4 - \frac{7}{\log_x 5}.$$

$$5.13. \text{ a) } \log_{\sqrt{11} - \sqrt{5}} (x^2 + 2x + 16 - 2\sqrt{55}) < 2;$$

$$6) \log_{\sqrt{6} - \sqrt{2}} (x^2 + 4x + 11 - 4\sqrt{3}) < 2;$$

$$\text{b) } \log_{2\sqrt{2} - \sqrt{3}} (x^2 - 4x + 14 - 4\sqrt{6}) < 2.$$

$$5.14. 4\log_2 x + \log_2 \left[\frac{x^2}{8(x-1)} \right] \leq 4 - \log_2 (x-1) - \log_2^2 x.$$

$$5.15. (x^2 - x - 6)\log_{2/3} (17 - x^2) > 0.$$

$$5.16. \log_{27x^{-3}} x^{-3} \cdot \log_{27x^4} x^2 < -\frac{1}{20}.$$

$$5.17. \log_2 (x+1) < 1 - 2\log_4 x.$$

$$5.18. 2\log_2 (x+2) < \log_2 (x+5) + 2.$$

$$5.19. \log_5 (x^2 - 9x + 20) \cdot \log_{5-x} 25 \geq \frac{\log_5 10 - 1}{\log_{25} (5-x)}.$$

$$5.20. \log_2 (2x+1) \leq \log_4 (2x^2 + x + 1) + \frac{1}{2}.$$

$$5.21. \sqrt{\lg x} + \sqrt{25 - \lg x} \leq 7.$$

$$5.22. \frac{\sqrt{x - \frac{1}{2}}}{\log_3 x^2} \geq 0.$$

$$5.23. \frac{\sqrt{2 - x^2} + 2x + x - 2}{\log_3 \left[\frac{5}{2} - x \right] + \log_3 2} \leq 0.$$

$$5.24. \text{ a) } x^{2\lg x} \geq 10x; \quad 6) x^{2\lg^3 x - 1.5 \lg x} \geq \sqrt{10}.$$

$$5.25. \text{ a) } \log_{\log_{1/2} x} (\log_{1/7} x) > 0;$$

$$6) \log_{\log_{1/3} x} (\log_{1/5} x) \leq 0.$$

$$5.26. \log_3 \log_{27} \log_2 (x^2 + x + 2) \leq -1.$$

$$5.27. \log_{-5x^2 - 6x} 6^x > 0.$$

$$5.28. \log_{(x+1)^2} 8 + 3\log_4 (x+1) \geq 9\frac{1}{4}.$$

$$5.29. \frac{1}{\log_2(x^2 - x + 1)} + 1 \geq \frac{\log_2(x+3)}{\log_2(x^2 - x + 1)}.$$

$$5.30. \text{a) } \log_{\frac{1}{4} - 3x} (1 - 25x^2) > 0;$$

$$\text{б) } \log_{\frac{1}{3} - 2x} (1 - 16x^2) > 0;$$

$$\text{в) } \log_{10 - x^2} \left[\frac{16}{5} x - x^2 \right] < 1;$$

$$\text{г) } \log_{x+1} (2x^2 - 3x + 1) \leq 2;$$

$$\text{д) } \log_{\frac{x+1}{x-1}} (2x^2 - 5x + 3) \leq 0.$$

$$5.31. \text{a) } \frac{1}{2} \log_{x-1} (x^2 - 8x + 16) + \log_{(4-x)} (-x^2 + 5x - 4) > 3;$$

$$\text{б) } \frac{1}{2} \log_{x+4} (x^2 + 2x + 1) + \log_{(-x-1)} (-x^2 - 5x - 4) \leq 3;$$

$$\text{в) } \log_{x+2} (4-x) + \log_{8+2x-x^2} (x+2)^2 \leq 2.$$

$$5.32. \frac{\log_3 (5x+1)}{\log_3 (7x-1)^2} \leq 1.$$

$$5.33. -\log_7 x^2 \leq 2\log_{1/7} \left[\frac{4x+3}{x} \right].$$

$$5.34. \frac{1}{\log_5 (3-2x)} - \frac{1}{4 - \log_5 (3-2x)} < 0.$$

$$5.35. \text{a) } \log_{x-2} (1 - 5x^3 + x^5) < 0;$$

$$\text{б) } \log_{\frac{x+1}{5}} (x^2 - 6x + 9) \geq 0.$$

$$5.36. \text{a) } 2\log_{\sqrt{2}} 3 + \log_{\sqrt{2}} \left[3^{x^2-1} - \frac{1}{9} \right] < \log_{\sqrt{2}} 26;$$

$$\text{б) } 2\log_{\sqrt{3}} 3 + \log_{\sqrt{3}} \left[3^{x^2-1} - \frac{2}{9} \right] < \log_{\sqrt{3}} 79.$$

$$5.37. \text{ а) } 5^{\frac{1}{4} \log_5^2 x} \geq 5x^{\frac{1}{5} \log_5 x}; \quad \text{ б) } 7^{\frac{1}{4} \log_7^2 x} \leq \frac{1}{7} x^{\frac{2}{7} \log_7 x};$$

$$\text{ в) } x^{\log_3^2 x - 1 + \log_{1/3} x} \leq x^{3 - \log_3 x}$$

$$5.38. \frac{1}{|\log_2 \frac{4}{x}| - 3} > \frac{1}{|\log_2 \frac{x}{2}| - 1}.$$

Задачи с параметрами

5.39. Решите неравенства:

$$\text{ а) } \frac{a^x + 4}{a^x - 1} > 2; \quad \text{ б) } \frac{2^x - 1}{2^x - 2} < a;$$

$$\text{ в) } \frac{\log_a x + 1}{\log_a x + 3} \leq \frac{1}{\log_a x + 1};$$

$$\text{ г) } a^{x^2 - 2x} < 1; \quad \text{ д) } \log_a (x^2 + 2x) < 0;$$

$$\text{ е) } \log_a (1 + x) < 1; \quad \text{ ж) } \log_a (x^2 - 2x) > 1;$$

$$\text{ з) } \log_a (x - 2) + \log_a x > 1; \quad \text{ и) } \log_{x^2} (x + a) < 1;$$

$$\text{ к) } x^{\log_a x} \leq a^2; \quad \text{ л) } x^{\log_2 a} + a^{\log_2 x} \geq 2a^2.$$

$$5.40. (-x^2 + \sqrt{5}x - 6) \frac{x - a}{\log_3 (x - 2)} < 0.$$

$$5.41. (c + 1) < (c + 2)3^{\sqrt{x-1}}.$$

5.42. Найдите все значения a , при которых неравенство

$$1 - \log_{1/7} (x^2 + 1) \geq \log_7 (ax^2 + 4x + a)$$

справедливо при всех x .

5.43. а) Найдите все значения α , при которых неравенство

$$\alpha 9^x + 4(\alpha - 1)3^x + \alpha > 1$$

выполняется при всех x .

б) найдите все значения c , при которых неравенство

$$1 + \log_2 \left[2x^2 + 2x + \frac{7}{2} \right] \geq \log_2 (cx^2 + c)$$

имеет хотя бы одно решение.

5.44. Для каких значений a неравенство

$$4^{x+1} + 9 \cdot 4^{-x} - 2(2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x}) \geq a$$

выполняется при всех $x \geq 0$?

5.45. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\log_{1/2} (\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \log_5 (x^2 + ax + 6) + \log_a 3 \geq 0$$

имеет ровно одно решение.

5.46. Найдите все значения p , при которых неравенство

$$\log_{x-p} x^2 < 2$$

выполняется хотя бы для одного числа x такого, что $|x| < 0,01$.

Глава 6

Планиметрия

6.1. Найдите площадь прямоугольного треугольника, один катет которого равен 13, а высота, опущенная на гипотенузу, равна 12.

6.2. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке K . Найдите площадь треугольника BCK , если $CB = a$, $CA = b$.

6.3. В треугольнике ABC угол A равен 60° , $AB = 1$, $BC = a$. Найдите AC .

6.4. Найдите периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, если известно, что хорда этой окружности длиной 2 удалена от ее центра на расстояние 3.

6.5. В прямоугольнике $ABCD$ сторона $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка M делит сторону CD в отношении 1:2,

считая от точки C , K — середина AD . Какой из отрезков больше: BK или AM ?

6.6. Углы треугольника ABC удовлетворяют условию $A > B > C$. К какой из вершин треугольника ближе всего находится центр вписанной окружности?

6.7. В треугольнике ABC угол C равен 60° , радиус описанной окружности равен 2. На прямой AC взята точка D такая, что $\angle ADB = 45^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABD .

6.8. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки, равные 7 и 24. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

6.9. Найдите площадь четырехугольника, если известно, что отрезки, соединяющие середины его сторон, равны 2 и 3, а угол между ними — 45° .

6.10. Докажите, что средняя линия равнобокой трапеции, описанной около окружности, равна ее боковой стороне.

6.11. В треугольнике ABC стороны равны $AB = \sqrt{17}$, $BC = 4$, $CA = 5$. На стороне BC взята точка D так, что $BD = 1$. Найдите угол ADB .

6.12. ABC — равнобедренный треугольник с основанием AC , O и I — соответственно центры описанной и вписанной окружностей. Найдите углы треугольника AOI , если:

а) $\angle B = 80^\circ$;

б) $\angle B = 100^\circ$.

6.13. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4.

6.14. В окружности с радиусом 1 проведена хорда длиной 1. Найдите площади частей круга, на которые данный круг разделен проведенной хордой.

6.15. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса прямого угла C , острый угол B равен 30° . Найдите углы треугольника DH_1H_2 , где H_1 и H_2 — точки пересечения высот треугольников ACD и BCD .

6.16. На стороне AB треугольника ABC взята точка M так, что $AM = 2MB$, а на стороне AC — точка K . Известно, что площадь треугольника AMK в два раза меньше площади треугольника ABC . В каком отношении точка K делит сторону AC ?

6.17. Найдите углы треугольника ABC , если известно, что медиана и высота, выходящие из вершины B , делят $\angle ABC$ на три равные части.

6.18. Найдите площадь общей части двух кругов, один из которых вписан в квадрат со стороной a , а другой имеет центр в одной из вершин квадрата, и окружность,

его ограничивающая, содержит ближайшую к этой вершине точку касания первого круга со сторонами квадрата.

6.19. Расположите в порядке возрастания площади правильного треугольника, квадрата, правильного шестиугольника и круга, если известно, что периметры многоугольников равны между собой и равны длине окружности.

6.20. Сторона правильного шестиугольника равна a . Середины трех его сторон, взятых через одну, являются вершинами треугольника. Найдите площадь этого треугольника.

6.21. Через точку M , расположенную на расстоянии 1 от центра окружности с радиусом 2, проведена хорда AB , равная 3,5. Найдите отрезки этой хорды AM и MB .

6.22. В квадрат вписана окружность, в окружность вписан правильный треугольник, в треугольник вновь вписана окружность, в получившуюся окружность вписан квадрат. Во сколько раз площадь последнего квадрата меньше площади исходного квадрата?

6.23. Из точки A , расположенной вне окружности, проведена касательная, длина которой равна 2, и секущая, высекающая на окружности хорду длиной 1. Найдите отрезок секущей, расположенный вне окружности.

6.24. В четырехугольнике $ABCD$ известны углы: $\angle CBD = 58^\circ$, $\angle ABD = 44^\circ$, $\angle ADC = 78^\circ$. Найдите $\angle CAD$.

6.25. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, в три раза больше окружности, в него вписанной. Найдите углы при основании этого треугольника.

6.26. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

6.27. На сторонах AB и AC прямоугольного треугольника ABC взяты точки K и M так, что $BK = KM = MA$. В каком отношении точка K делит гипотенузу AB , если $\angle BAC = 60^\circ$?

6.28. Дан угол величиной α с вершиной в точке A . Расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из некоторой точки B на стороны угла, равно a . Найдите AB .

6.29. Сторона ромба $ABCD$ равна 6, $\angle BAD = 60^\circ$. На стороне BC взята точка E так, что $CE = 2$. Найдите расстояние от точки E до центра ромба.

6.30. Дан треугольник ABC . Сколько найдется таких точек M , что треугольники ABM , BMC и CAM равновелики?

6.31. Найдите отношение радиусов двух окружностей, касающихся между собой, если каждая из них касается сторон угла, величина которого равна α .

6.32. На одной стороне прямого угла с вершиной в точке O взяты две точки A и B , причем $OA = a$, $OB = b$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся другой стороны угла.

6.33. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна C , а один из острых углов равен 30° . Найдите радиус окружности с центром в вершине угла в 30° , делящей данный треугольник на две равновеликие части.

6.34. В прямоугольном треугольнике медиана равна m и делит прямой угол в отношении $1:2$. Найдите площадь треугольника.

6.35. Определите острый угол ромба, в котором сторона есть среднее геометрическое его диагоналей.

6.36. Диагонали четырехугольника равны a и b , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны. Найдите площадь четырехугольника.

6.37. Около окружности описана равнобокая трапеция с боковой стороной, равной l , одно из оснований трапеции равно a . Найдите площадь трапеции.

6.38. Две прямые, параллельные основаниям трапеции, делят каждую из боковых сторон на три равные части. Найдите площадь средней части, если площади крайних S_1 и S_2 .

6.39. В трапеции $ABCD$ известны $AB = a$, $BC = b$ ($a \neq b$). Определите, что пересекает биссектриса угла A : основание BC или боковую сторону CD ?

6.40. Дан полукруг с диаметром AB . Через середину полуокружности проведены две прямые, делящие полукруг на три равновеликие части. В каком отношении эти прямые делят диаметр AB ?

6.41. Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Одно из оснований в 2 раза больше другого. Площадь одного треугольника, прилежащего к боковой стороне, равна 2. Найдите площадь трапеции.

6.42. Найдите площадь треугольника, если его основание равно a , а углы при основании равны 30° и 45° .

6.43. В прямоугольный треугольник вписана окружность с радиусом 1. Периметр треугольника равен 15. Найдите стороны треугольника.

6.44. Найдите угол A треугольника ABC , если заданы длины его сторон $AC = b$, $AB = c$ и длина l биссектрисы внутреннего угла A .

6.45. Определите углы треугольника, в котором медиана, биссектриса и высота, выходящие из одной и той же вершины треугольника, делят соответствующий угол на 4 равные части.

6.46. В трапеции лежат две касающиеся окружности с радиусом R , каждая из которых касается обоих оснований и одной из боковых сторон, а центры окружностей лежат на диагоналях. Найдите стороны трапеции.

6.47. В треугольнике ABC сторона AC равна 26, а медианы, проведенные из вершин A и C , равны соответственно 36 и 15. Найдите третью медиану.

6.48. Сторона треугольника равна 9, радиус вписанной окружности равен 3. Какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника?

6.49. Площадь прямоугольного треугольника равна P , а площадь круга, вписанного в него, равна Q . Найдите площадь круга, описанного около этого треугольника.

6.50. На координатной плоскости заданы точки $O(0; 0)$, $A(0; 1)$, $B(2; 0)$, $C(4; 0)$. Найдите координаты $(x; y)$ точки M такой, что угол OMA равен углу $СMB$, а угол MAO равен углу MBC .

6.51. В треугольнике ABC угол A равен α , $AB = AC = 1$. Пусть S — площадь треугольника ABC ,

$$g(\alpha) = (AB^2 + BC^2 + CA^2)/S.$$

а) Докажите, что $g(\alpha) = 4(2 - \cos \alpha)/\sin \alpha$.

б) Решите уравнение $g(\alpha) = 4\sqrt{3}$.

в) Найдите наименьшее значение функции g .

6.52. В треугольник ABC вписана окружность с радиусом 1. Известно, что угол C равен $\pi/3$, угол B равен α . Через $S(\alpha)$ обозначим площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания вписанной окружности.

а) Докажите, что

$$S(\alpha) = \frac{3}{4} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

б) Найдите область значений функции S .

в) Постройте график функции S .

6.53. При каком значении высоты прямоугольная трапеция с острым углом 30° и периметром 6 имеет наибольшую площадь?

6.54. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BD и AE . Найдите отношение площадей треугольников ABC и BDE , если $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$.

6.55. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE . Найдите отношение площадей треугольников ABC и AED , если $AB = 6$, $AC = 5$, $CB = 7$.

6.56. В круге дана точка на расстоянии 15 от центра; через эту точку проведена хорда, которая делится ею на две части с длинами 7 и 25. Найдите радиус круга.

6.57. Длины меньшей диагонали ромба, стороны и большей диагонали — последовательные члены геометрической прогрессии. Найдите величины углов ромба.

6.58. В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN , причем $AM:CM = 2:3$. Найдите отношение площадей треугольников BMN и ABC , если острый угол BAC равен α .

6.59. Найдите углы прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 2, а гипотенуза — 13.

6.60. Вне квадрата $ABCD$ дана точка O . Найдите площадь квадрата, если известно, что $OA = OB = 5$, $DO = \sqrt{13}$.

6.61. В окружность с радиусом r вписана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании и высотой h . Найдите площадь трапеции.

6.62. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CD и AE . Найдите длину высоты AE , если известно, что $AD = BC = 4$, $AB = 6$.

6.63. Около прямоугольного треугольника описана окружность. Найдите катеты этого треугольника, если известно, что расстояния от концов гипотенузы до прямой, касающейся окружности в вершине прямого угла треугольника, равны a и b .

6.64. Найдите площадь квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами a и b (сторона квадрата лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах треугольника).

6.65. Из точки A к окружности с радиусом R проведена касательная, которая касается окружности в точке M . Секущая, проходящая через точку A , пересекает окружность в точках K и L , причем L — середина отрезка AK , угол AMK равен 60° . Найдите площадь треугольника AMK .

6.66. Две окружности с радиусами 3 и 4, расстояние между центрами которых равно 5, пересекаются в точках A и B . Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D так, что $CD = 8$ и B лежит между C и D , $B \neq C \neq D$. Найдите площадь треугольника ACD .

6.67. В тупоугольном треугольнике ABC площадью $24\sqrt{5}$ медианы AN и CM пересекаются под углом $\arccos 2/3$. Найдите стороны треугольника, если $AN - CM = 3$.

6.68. Прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 3$ и $BC = 2$, вписан в квадрат. Известно, что вершина A совпадает с вершиной квадрата, а вершины B и C лежат на сторонах квадрата, не содержащих точку A . Найдите площадь квадрата.

6.69. Около прямоугольного треугольника ABC с катетами $AC = 5$, $BC = 12$ описана окружность. Точки E , G — середины меньших дуг AC , BC этой окружности, точка F — середина дуги AB , не содержащей точки C . Найдите площадь четырехугольника $AEFG$.

6.70. Окружность O_1 с радиусом $3r$ касается продолже-

ния стороны AB угла ABC , ее центр лежит на стороне BC . Окружность O_2 с радиусом r касается сторон угла ABC и окружности O_1 . Найдите угол ABC .

6.71. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны AB . Известно, что биссектриса угла C делит площадь треугольника AMD пополам. Найдите длину стороны AD , если $CD = 4$.

6.72. Основание AD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) является диаметром окружности, которая касается прямой CD в точке D и пересекает сторону AB в точ-

ке L так, что $AB = \frac{4\sqrt{3}}{3} AL$. Радиус окружности равен R ,

угол $CAD = 45^\circ$. Найдите площадь трапеции.

6.73. Дан треугольник ABC . Окружность с радиусом R касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно и пересекает медиану BD в точке L так, что $BL = \frac{5}{9} BD$.

Найдите площадь треугольника.

6.74. Основание MQ трапеции $MNPQ$ ($MQ \parallel NP$, $MQ > NP$) является диаметром окружности, которая касается прямой MN в точке M и пересекает сторону PQ в

точке K так, что $PQ = 4\sqrt{3} KQ$. Радиус окружности равен R , угол $NQM = 60^\circ$. Найдите площадь трапеции.

6.75. Дан ромб $ABCD$. Окружность с радиусом R касается прямых AB и AD в точках B и D соответственно и пересекает сторону BC в точке L так, что $4BL = BC$. Найдите площадь ромба.

6.76. Диагонали BD и AC выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны, пересекаются в точке O , $AO = 2$, $OC = 3$. Точка K лежит на стороне BC , причем $BK:KC = 1:2$. Треугольник AKD равносторонний. Найдите его площадь.

6.77. В равносторонний треугольник ABC вписана окружность и проведен отрезок MN , который касается ее и параллелен стороне AB . Определите периметр трапеции $AMNB$, если длина стороны AB равна 18.

6.78. Сумма квадратов параллельных сторон трапеции равна 288. Определите длину отрезка, параллельного этим сторонам и делящего площадь трапеции пополам.

6.79. На стороне AD прямоугольника $ABCD$ взята точка F такая, что $FD = \frac{1}{3} AD$. Угол CAD равен α , угол CFD равен β . Положим

$$\gamma = \alpha + \beta, k = \operatorname{tg} \alpha.$$

а) Докажите, что $\operatorname{tg} \gamma = \frac{4k}{1-3k^2}$.

б) При каких значениях α величина угла γ меньше $\frac{\pi}{2}$?

в) Найдите α такое, что $\gamma = \frac{3\pi}{4}$.

г) Докажите, что $\beta < 3\alpha$.

6.80. В треугольнике ABC угол A прямой, угол C равен α . Длина гипотенузы BC равна 1. Круг с радиусом r и центром в точке A касается внешним образом кругов с центрами в точках B и C . S — сумма площадей трех кругов.

а) Покажите, что

$$S = \pi(1 + 3r^2 - 2r(\sin \alpha + \cos \beta)).$$

б) При каком r круги с центрами в точках B и C также касаются друг друга?

в) Пусть r таково, что выполнены условия предыдущего пункта. Какое наименьшее значение может принимать площадь S в зависимости от α ?

6.81. В треугольнике ABC вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$ и вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{n}$. Разложите по векторам \vec{m} и \vec{n} вектор \overrightarrow{BM} , где точка M делит отрезок AC в отношении $AM:MC = 1:3$.

6.82. В прямоугольной трапеции острый угол равен $\alpha = 30^\circ$, а длина вписанной в нее окружности равна $c = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Определите площадь трапеции.

6.83. Две окружности с радиусами R и r касаются друг друга внешним образом в точке A . Общие касательные AD и BC к окружностям пересекаются в точке D . Докажите, что $AD^2 = Rr$ (B и C лежат на окружностях).

6.84. Точка пересечения медиан прямоугольного треугольника удалена от катетов на расстояния 3 и 4 соответственно. Найдите расстояние от этой точки до гипотенузы.

6.85. Определите площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{13}$, а медиана третьей стороны равна 2.

6.86. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами p_1 и p_2 . Найдите стороны треугольника.

6.87. Боковые стороны AB и CD трапеции продолжены до пересечения в точке E . Точка O — центр описанной

около треугольника ADE окружности. Найдите величину острого угла A трапеции, если известно, что точки A , B ,

C , D , O лежат на окружности, радиус которой в $\sqrt{3}$ раз меньше радиуса окружности, описанной около треугольника ADE .

6.88. Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения площади параллелограмма, произведение длин двух неравных высот которого равно 9, а величина острого угла параллелограмма не меньше 30° и не больше 45° .

6.89. В треугольнике ABC сторона $AC = 3$, $BC = 4$, а медианы AD и BE пересекаются под прямым углом. Найдите сторону AB этого треугольника.

6.90. Средняя линия трапеции равна 10 и делит площадь трапеции в отношении 3:5. Найдите длины оснований этой трапеции.

6.91. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 20 и 21. Найдите длину окружности, описанной около данного треугольника.

6.92. В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны AB равна 4. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E . В треугольник ABE вписана окружность с центром в точке O , касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке N . Найдите величину угла MON , если длина отрезка MN равна 2.

6.93. В параллелограмме $ABCD$ длина стороны AD равна 8. Биссектриса угла ADC пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность с центром в точке O , касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке L . Найдите величину угла KOL , если длина KL равна 2.

6.94. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD . Длина диагонали AC равна a , длина боковой стороны BC равна b . Найдите площадь трапеции.

6.95. Из точки, расположенной внутри правильного треугольника ABC , длина стороны которого равна a , опущены перпендикуляры на стороны AB , BC , CA . Длины перпендикуляров соответственно равны m , n , k . Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника, вершинами которого служат основания перпендикуляров.

6.96. Точка N лежит на стороне BC треугольника ABC , точка M — на продолжении стороны AC за точку A , при этом $AM = AC$, $BN:NC = 3:4$. Найдите, в каком отношении прямая MN делит сторону AB .

6.97. Сумма длин оснований трапеции равна 9, а длины диагоналей равны 5 и $\sqrt{34}$. Найдите площадь трапеции.

6.98. Прямоугольный треугольник, периметр которого равен 10, разбит высотой, опущенной на гипотенузу, на два треугольника. Периметр одного из них равен 6. Найдите периметр другого треугольника.

6.99. Два круга с одинаковыми радиусами r касаются друг друга внешним образом и касаются третьего круга с радиусом R внутренним образом. Найдите радиус круга, одновременно касающегося этих трех кругов (из двух возможных случаев рассмотрите тот, в котором центр 4-го круга и центр круга с радиусом R лежат по разные стороны от точки касания кругов с радиусами r).

6.100. В треугольнике ABC угол C — прямой. Точки D и E на катете BC расположены так, что отрезки AD и AE делят угол A на три равные части. $AD = a$, $AE = b$. Найдите отношение площадей треугольников ADC и AEC .

6.101. Равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a повернут вокруг вершины прямого угла на угол 30° . Найдите площадь общей части исходного и повернутого треугольников.

6.102. Длины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ соответственно равны 9 и 3. Точка E — середина боковой стороны AB , точка F — середина CD . Биссектриса угла BAD пересекает среднюю линию EF в точке P , а биссектриса угла ADC — в точке Q . Длины отрезков EQ , PQ и PF равны. Найдите площадь трапеции.

6.103. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD , при этом величины углов ADC и CDB относятся как 7:5. Найдите AD , если известно, что $BC = 1$, а угол BAC равен $\frac{\pi}{6}$.

6.104. В треугольнике ABC угол ACB — прямой, CD — биссектриса, величина угла BDC равна 75° . Найдите BD , если известно, что $AC = \sqrt{3}$.

6.105. В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D , причем $\angle CDA$ равен $\frac{2\pi}{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AD , DC и дуги AC , если $OC = 2$, $OD = \sqrt{3}$.

6.106. В четырехугольнике $MNPQ$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон MN , NP и PQ , а другая — сторон MN , MQ и PQ . Точки B и A лежат, соответственно, на сторонах MN и PQ , причем отрезок AB касается обеих окружностей. Найдите длину стороны MQ , если $NP = b$ и периметр четырехугольника $BAQM$ больше периметра четырехугольника $ABNP$ на величину $2p$.

6.107. В окружность с радиусом 2 вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Из точки K , лежащей на продолжении стороны AF так, что $KA < KF$ и $KA = \sqrt{11} - 1$, проведена секущая KH , пересекающая окружность в точках N и H . Известно, что внешняя часть секущей KN равна 2 ($KN = 2$), а угол NFH — тупой. Найдите угол HKF .

6.108. Длина стороны AB прямоугольника $ABCD$ равна 12, а длина стороны AD равна 5. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке E . Найдите отношение расстояния от точки E до центра окружности, вписанной в треугольник AED , к расстоянию от точки E до центра окружности, вписанной в треугольник DEC .

6.109. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC , пересекает сторону AB в точке D и сторону BC в точке E . Найдите величину угла ACB , если $CE = 1$, $BE = CD = 4$, $AD:BD = 4:1$.

6.110. Треугольник ABC вписан в окружность. Сторона CB продолжена за точку B до точки E так, что $BE = 3$. Отрезок AE пересекает окружность в точке D и $DE = 2$.

Найдите величину угла ABC , если $AC = \sqrt{129}$, $AD:BC = 7:3$.

6.111. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD . Известно, что $AD = 2$, $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$ и расстояние между точкой пересечения биссектрис треугольника ABD и точкой пересечения биссектрис треугольника ACD равно $\sqrt{2}$. Найдите длину стороны BC .

6.112. Можно ли разместить равносторонний треугольник со стороной 3 внутри круга с радиусом $4\sqrt{10}$?

6.113. В прямоугольнике $LMNK$ диагонали LN и MK пересекаются в точке O . Треугольники MON и $MO'N$ симметричны относительно общей стороны MN . Угол MON в два раза больше, чем угол $LO'K$. Найдите стороны прямоугольника $LMNK$, если известно, что площадь пятиугольника $LMO'NK$ равна $5\sqrt{3}$.

6.114. В треугольнике известны длина a одной из сторон и величины α и β прилежащих к ней углов. Найдите площадь треугольника.

6.115. Продолжение общей хорды AB двух пересекающихся окружностей с радиусами R и r пересекает их общую касательную в точке C (A между B и C , M и N — точки касания). Найдите: а) радиус окружности, проходящей через точки A , M и N ; б) отношение расстояний от точки C до прямых AM и AN .

6.116. В остроугольном треугольнике известны величины α и β двух углов A и B и длина h высоты, опущенной из вершины. Найдите площадь треугольника.

6.117. Общая касательная к двум пересекающимся окружностям с радиусами R и r (A и B — точки касания) пересекает продолжение их общей хорды MN в точке D (N между D и M). Найдите:

1) радиус окружности, описанной около треугольника AMB ;

2) отношение высот треугольников AMD и DMB , опущенных из вершины D .

6.118. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 4$ и $BC = 2$ проведена средняя линия EF (точка E лежит на AB). Прямая, проходящая через вершину A трапеции, пересекает боковую сторону CD в точке H , а среднюю линию в точке G , причем $3GF = EF$. Найдите отношение высоты треугольника AHD , опущенной из вершины H к высоте трапеции.

6.119. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, причем $KN = 3$, а угол M равен 120° . Прямые LM и MN являются касательными к окружности, описанной около треугольника KLN . Найдите площадь треугольника KLN .

6.120. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает сторону AB в точке D так, что $AD = \frac{1}{3} AB$. Найдите площадь треугольника ABC , если $AC = 1$.

6.121. Основание AC равнобедренного треугольника ABC является хордой окружности, центр которой лежит внутри треугольника ABC . Прямые, проходящие через точку B , касаются окружности в точках D и E . Найдите площадь треугольника DBE , если $AB = BC = 2$, $\angle ABC = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$, а радиус окружности равен 1.

6.122. В треугольнике ABC известна сторона $AB = 4$, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ABC = 130^\circ$. На AB как на диаметре построен круг. Найдите площадь части круга внутри треугольника.

6.123. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K и M так, что $AK:KB = 2:3$, а $BM:MC = 2:1$. Найдите отношение площадей треугольников KBM и KMD .

6.124. Через вершину угла A проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках M и N . Биссектриса этого угла пересекает окружность в точке P . Найдите ра-

диус этой окружности, если $AM = 1$, $AN = 2$, $AP = 4$.

6.125. На стороне BC треугольника BCD выбрана точка E , а на стороне BD — точка F так, что $\angle BEF = \angle BDC$.

Площадь круга, описанного около треугольника CFD , в 5 раз меньше площади круга, описанного около треугольника BEF . Отношение площади четырехугольника $CEFD$ к площади треугольника BEF равно $\frac{9}{16}$. Угол FDE равен 45° . Найдите угол CED .

6.126. На гипотенузе KM прямоугольного треугольника KLM расположен центр O окружности, которая касается катетов KL и LM в точках A и B . Найдите длину отрезка AK , если известно, что $BM = \frac{23}{16}$, $\frac{AK}{AC} = \frac{5}{23}$, где C — точка пересечения окружности с KM , лежащая между точками O и M .

6.127. В треугольнике ABC сторона BC равна 6, сторона AC равна 5, а угол при вершине B равен 30° . Найдите площадь треугольника, если расстояние от вершины A до прямой BC меньше, чем $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

6.128. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\frac{\sqrt{15}}{3}$. Окружность с радиусом $\frac{5\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ касается лучей, образующих угол ACB , и вписанной в треугольник ACB окружности. Найдите тангенс угла ABC , если площадь треугольника ABC равна $3\sqrt{15}$, а наибольшей из его сторон является сторона AC .

6.129. Около окружности с радиусом $\frac{\sqrt{6}}{2}$ описан треугольник ABC . Периметр этого треугольника равен 16, наибольший из его внутренних углов находится при вершине A , а котангенс угла ABC равен $\frac{5\sqrt{6}}{12}$. Найдите наибольший из радиусов окружностей, касающихся вписанной в треугольник ABC окружности и лучей, образующих угол BAC .

6.130. Биссектрисы углов A и B трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке O . Найдите длины сторон

AB и BC , если $\angle A = 2 \arccos \sqrt{\frac{5}{6}}$, $OC = \sqrt{7}$, $OD = 3\sqrt{15}$, $AD = 5 BC$.

6.131. На продолжении стороны AD ромба $ABCD$ за точку D взята точка K . Прямые AC и BK пересекаются в точке Q . Известно, что $AK = 14$ и что точки A , B и Q лежат на окружности с радиусом 6, центр которой принадлежит отрезку AK . Найдите длину отрезка BK .

6.132. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 4, длина основания BC равна 3, длины сторон AB и CD равны. Точки M и N лежат на диагонали BD , причем точка M расположена между точками B и N , а отрезки AM и CN перпендикулярны диагонали BD . Найдите длину отрезка CN , если $BM:DN = 2:3$.

6.133. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC , пересекает сторону AB в точке E и сторону BC в точке F . Угол AEC в 5 раз больше угла BAF , а угол ABC равен 72° . Найдите радиус окружности, если $AC = 6$.

6.134. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка E так, что AE равно трети длины AC , а на стороне AD — точка F так, что AF равно четверти длины AD . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если площадь четырехугольника $ABGE$, где G — точка пересечения прямой FE со стороной BC , равна 8.

6.135. Окружность, диаметр которой равен $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведенной из точки C к окружности, равна 3, $AB = 1$. Найдите все возможные значения, которые может принимать длина стороны BC .

6.136. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC . Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E . Найдите расстояние от точки E до прямой CD , если $AD = 4$, а $BC = 3$.

6.137. Точки K , L , M делят стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ в отношениях $AK:BK = CL:BL = CM:DM = 1:2$. Радиус окружности, описанной около треугольника KLM , равен $5/2$, $KL = 4$, $LM = 3$. Какова площадь $ABCD$, если $KM < KL$?

6.138. Высота трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны соответственно 8 и 6. Через точку E , лежащую на стороне CD , проведена прямая BE , которая делит диагональ AC в точке O в отношении $AO:OC = 3:2$. Найдите площадь треугольника OEC .

6.139. Две окружности разных радиусов касаются в точке A одной и той же прямой и расположены по разные стороны от нее. Отрезок AB — диаметр меньшей окружно-

сти. Из точки B проведены две прямые, касающиеся большей окружности в точках M и N . Прямая, проходящая через точки M и A , пересекает меньшую окружность в точке K . Известно, что длина отрезка MK равна

$\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, а угол BMA равен 15° . Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных BM , BN и той дугой MN большей окружности, которая не содержит точку A .

6.140. В треугольнике ABC угол C — тупой, D — точка пересечения прямой DB , перпендикулярной к AB , и прямой DC , перпендикулярной к AC . Высота треугольника ADC , проведенная из вершины C , пересекает AB в точке M . Известно, что $AM = a$, $MB = b$. Найдите AC .

6.141. Три круга с центрами в точках P , Q и R попарно касаются друг друга внешним образом в точках A , B и C . Известно, что величина угла PQR равна $2 \arcsin \frac{1}{3}$, а

сумма радиусов всех трех кругов равна $12\sqrt{2}$. Определите, какую наибольшую длину может иметь окружность, проходящая через точки A , B и C .

6.142. Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD . Из точки D радиусом, равным AD , описана окружность, пересекающая стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Вычислите длину стороны AC , если $AB = c$, $AM = n$ и $AN = m$.

6.143. Дан треугольник со сторонами 2; 3; 4. Найдите длину биссектрисы, проведенной к средней по длине стороне.

6.144. В ромбе $ABCD$ угол BCD равен 135° , а стороны равны 8. Окружность касается прямой CD и пересекает сторону AB в двух точках, расположенных на расстоянии 1 от A и B . Найдите радиус этой окружности.

6.145. В окружность с центром O вписана трапеция $KLMN$, в которой $KN \parallel LM$, $KN = 6$, $LM = 4$. Угол KLM равен 135° . Точка A лежит на отрезке KN , причем $AK = 4$. Прямая LA пересекает окружность в точке B , отличной от L . Найдите расстояние от точки O до прямой BN .

6.146. Точка C лежит на стороне MN ромба $KLMN$, причем $CN = 2CM$ и угол MNK равен 120° . Найдите отношение косинусов углов CKN и CLM .

6.147. Через центр окружности, описанной около треугольника ABC , проведены прямые, перпендикулярные сторонам AC и BC . Эти прямые пересекают высоту CH треугольника или ее продолжение в точках P и Q . Известно, что $CP = p$, $CQ = q$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

6.148. Периметр прямоугольного треугольника ABC равен 90, причем длина катета AC больше, чем 20. Окружность с радиусом 10, центр которой лежит на катете BC , касается прямых AB и AC . Найдите площадь треугольника ABC .

6.149. Две окружности с центрами O_1 и O_2 , лежащими на стороне MN треугольника MPN , касаются друг друга и пересекают стороны MP и PN в точках M , D и N , C соответственно, причем $MO_1 = O_1D = 3$ и $NO_2 = CO_2 = 6$. Найдите площадь треугольника MNP , если известно, что отношение площади треугольника MCO_2 к площади тре-

угольника O_2DN равно $\frac{8}{5}\sqrt{3}$ и $PN = MP\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

6.150. Трапеции $ABCD$ и $ACDE$ с равными большими основаниями, соответственно AD и AC , вписаны в одну окружность. Чему равен радиус этой окружности, если

площадь треугольника ADE равна $1 + \sqrt{3}$, а угол COD равен 60° , где O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$?

6.151. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M , а продолжения сторон AB и CD — в точке O . Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AOD . Найдите отношение площадей треугольников AOD и BOC , если $OA = 6$, $OD = 4$, $CD = 1$.

6.152. Две окружности пересекаются в точках A и B . Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AB . Точки K и N лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AK , касается одной окружности в точке A , прямая, содержащая отрезок AN , касается другой окружности также в точке A .

Длина отрезка AK равна $\sqrt{5}$, длина отрезка AN равна 2,

а тангенс угла KAN равен $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найдите площадь треугольника KBN .

6.153. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке E . На прямой AC взята точка M , причем $\angle BME = 70^\circ$, $\angle ADB = 50^\circ$, $\angle CDB = 60^\circ$. Где расположена точка M : на диагонали AC или на ее продолжении? Ответ обоснуйте.

6.154. На окружности с радиусом $\sqrt{6}$ расположены пять различных точек, которые являются вершинами трех трапеций: $KLMN$ (с большим основанием KN), $KMNP$ (с основанием KM), MNP (с основанием LP). Определите

площадь треугольника KLM , если известно, что диагонали трапеции $KMNP$ пересекаются под прямым углом.

Глава 7

Стереометрия

7.1. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 4, 5 и 6. Найдите площадь наибольшего сечения, проходящего через два параллельных не лежащих на одной грани ребра параллелепипеда.

7.2. Дан правильный тетраэдр с ребром a (треугольная пирамида, все ребра которой равны a). Найдите его полную поверхность, объем, расстояние между противоположными ребрами, радиус описанного шара, радиус вписанного шара.

7.3. В правильной треугольной пирамиде известна сторона основания a и плоский угол при вершине α . Найдите её объем, двугранный угол при основании, двугранный угол между боковыми гранями, радиус вписанного и описанного шаров.

7.4. Решите предыдущую задачу для четырехугольной пирамиды.

7.5. Докажите, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра попарно перпендикулярны.

7.6. Через середину бокового ребра правильной треугольной пирамиды проведено сечение, параллельное двум скрещивающимся ребрам этой пирамиды. Найдите площадь этого сечения, если сторона основания равна a , а боковое ребро равно b .

7.7. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Постройте сечение куба плоскостью и найдите площадь сечения, если:

а) плоскость проходит через вершины A и D_1 и середину ребра BB_1 ;

б) плоскость проходит через вершину A и параллельна плоскости DBC_1 ;

в) плоскость проходит через середины ребер AB_1 , BB_1 , $B_1 C_1$.

7.8. Докажите, что плоскость, пересекающая боковую поверхность цилиндра, но не пересекающая его оснований, делит ось цилиндра, боковую поверхность и объем в одинаковом отношении.

7.9. В конус вписан цилиндр — основание цилиндра лежит на основании конуса, а другое основание цилиндра совпадает с сечением конуса плоскостью. Радиус основания цилиндра в два раза меньше радиуса основания конуса. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса.

7.10. Через центр шара проведены три попарно перпендикулярные плоскости, разделившие шар на восемь частей. В каждую из этих частей вписано по шару.

а) Найдите отношение объема вписанного в одну из частей шара к объему исходного шара.

б) Центры вписанных шаров являются вершинами многогранника. Что это за многогранник? Найдите отношение объемов полученного многогранника и данного шара.

7.11. Найдите объем тела, получающегося при вращении прямоугольного треугольника с катетами a и b вокруг его гипотенузы.

7.12. Основания цилиндра и конуса расположены в одной плоскости, а шар касается этой же плоскости, причем высота цилиндра равна высоте конуса и равна диаметру шара. Объемы всех трех тел равны между собой. Как относятся их полные поверхности?

7.13. Найдите объем конуса, разверткой которого является полукруг радиусом R .

7.14. Найдите угол: а) между двумя диагоналями куба; б) между диагональю куба и непересекающейся с ней диагональю грани куба; в) между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба.

7.15. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются середины ребер треугольной пирамиды с объемом V .

7.16. Определите вид многоугольника, являющегося ортогональной проекцией куба на плоскость: а) перпендикулярную диагонали его грани; б) перпендикулярную диагонали куба. Найдите площадь этой проекции, если ребро куба равно a .

7.17. Все ребра правильной треугольной призмы равны между собой. Найдите угол между плоскостью основания этой призмы и плоскостью, проходящей через противоположные вершины боковой грани и середину противоположного этой грани бокового ребра.

7.18. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 6, боковое ребро равно 4. Найдите площадь сечения, проходящего через две вершины одного основания призмы и середину стороны другого основания (не совпадающего с боковой гранью призмы).

7.19. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны 2. Найдите объем этой пирамиды, а также радиусы вписанного и описанного шаров.

7.20. В основании правильной треугольной призмы лежит правильный треугольник со стороной 6. Найдите объем этой призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

7.21. Основания двух правильных треугольных пирамид расположены в одной плоскости. Сторона основания

и высота одной соответственно равны 3 и 2, другой, наоборот, 2 и 3. Плоскость, параллельная основаниям, пересекает эти пирамиды по равным треугольникам. Найдите площади этих сечений.

7.22. Внутри куба с ребром a расположены два равных касающихся между собой шара. При этом один шар касается трех граней куба, имеющих общую вершину, а другой касается трех оставшихся граней куба. Найдите радиусы этих шаров.

7.23. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 150° . Через вершину конуса проведено сечение, являющееся прямоугольным треугольником. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания конуса.

7.24. Докажите, что если боковые ребра пирамиды равны между собой, то в основании пирамиды лежит многоугольник, около которого можно описать окружность, и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.

7.25. Докажите, что если все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой, то в основании пирамиды лежит многоугольник, в который можно вписать окружность, и вершина пирамиды проектируется в центр этой окружности.

7.26. Найдите объем треугольной пирамиды, в основании которой лежит треугольник со сторонами 3, 4 и 5, а двугранные углы при основании равны 60° .

7.27. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса, вписанного в один и тот же шар, если высота и цилиндра, и конуса равна радиусу шара.

7.28. Осевое сечение конуса является правильным треугольником. Через ось конуса проведены две взаимно перпендикулярные плоскости. Рассмотрим два шара, каждый из которых касается этих двух плоскостей, плоскости основания конуса и его боковой поверхности, только один касается ее изнутри, а другой — снаружи. Найдите отношение радиусов этих шаров.

7.29. Осевым сечением цилиндра является квадрат, а осевым сечением конуса — правильный треугольник, равновеликий квадрату. Найдите отношение объемов цилиндра и конуса.

7.30. Внутри треугольной пирамиды, все ребра которой равны a , расположены четыре равных шара. Каждый шар касается трех других, а также трех граней пирамиды. Найдите радиусы этих шаров.

7.31. Радиус основания цилиндра равен 1, а высота равна $\sqrt{2}$. Две вершины правильного треугольника расположены на границе одного основания цилиндра, а одна вершина — на границе другого основания. Найдите сторону правильного треугольника.

7.32. Сторона основания правильной четырехугольной

пирамиды равна a , а площадь полной поверхности $3a^2$. Найдите объем пирамиды.

7.33. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равносторонний треугольник ABC со стороной a . Вершина A_1 проектируется в точку пересечения медиан треугольника ABC , ребро AA_1 составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите площадь боковой поверхности призмы.

7.34. В правильной шестиугольной пирамиде заданы угол α между соседними боковыми гранями и объем V шара, вписанного в пирамиду. Найдите высоту пирамиды.

7.35. В правильной пятиугольной пирамиде задан двугранный угол φ при боковом ребре. Найдите плоский угол при вершине боковой грани.

7.36. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна a . Через диагональ нижнего основания и вершину верхнего основания проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани призмы по прямым, угол между которыми равен α . Определите объем призмы.

7.37. В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через точки B , C и A_1 проведено сечение, площадь которого равна S , а расстояние от плоскости сечения до вершины B_1 равно h . Найдите объем призмы.

7.38. Какой наибольший объем может иметь четырехугольная пирамида, боковое ребро которой имеет длину 1?

7.39. В прямой круговой конус вписана правильная шестиугольная призма так, что нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, а вершины верхнего основания лежат на боковой поверхности конуса. Известно, что площадь полной поверхности этой призмы имеет наибольшее возможное значение. Найдите объем призмы, если известно, что длина образующей конуса равна l , а угол при вершине осевого сечения конуса равен α .

7.40. Дана пирамида $ABCD$, в которой ребро DC перпендикулярно плоскости ABC , $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 3$, угол $ACB = \frac{\pi}{3}$, $DC = 13$. Проведена сфера с радиусом 5 и центром в вершине D . Найдите длину линии пересечения сферы с основанием ABC .

7.41. Радиус основания цилиндра в три раза больше его высоты. Во сколько раз площадь полной поверхности цилиндра больше площади его боковой поверхности?

7.42. Найдите квадрат отношения высоты конуса к диаметру основания, если конус при заданном объеме имеет наименьшую боковую поверхность.

7.43. В полушар с радиусом $R = \sqrt{\frac{3}{2}}$ вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на сферической поверхности. Найдите объем куба.

7.44. В прямой круговой конус, боковая поверхность которого в k раз больше площади основания, вписан шар с радиусом R . Найдите объем конуса.

7.45. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды высотой h , зная, что отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания равно k .

7.46. В прямом круговом конусе отношение площади основания к площади боковой поверхности равно m , а длина образующей равна l . Найдите объем конуса.

7.47. В правильной треугольной пирамиде $SABC$, высота которой в два раза больше стороны основания, на боковых ребрах SB и SC взяты точки M и N так, что MN параллельна BC . Через прямую MN проходят плоскости α и β . Плоскость α перпендикулярна плоскости грани SBC и содержит точку A , плоскость β проходит через середину бокового ребра SA . Найдите отношение площадей сечений пирамиды плоскостями β и α .

7.48. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом, равным α . Боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы величиной β . Найдите объем пирамиды, если длина бокового ребра равна b .

7.49. Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен 60° , боковое ребро равно a . Через середину одного из боковых ребер перпендикулярно к нему проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

7.50. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α . Найдите двугранный угол при боковом ребре.

7.51. Объем правильной треугольной призмы равен V , угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен α . Найдите сторону основания призмы.

7.52. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, зная, что плоский угол при вершине равен α , а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r .

7.53. Центр сферы совпадает с центром основания кругового конуса, а ее радиус равен радиусу основания конуса. Найдите радиус окружности, по которой сфера пересекает поверхность конуса, если известны высота конуса H и угол при вершине осевого сечения α .

7.54. Все четыре грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, длина боковых сторон которых равна $\sqrt{3}$. Найдите длину оснований этих треугольников, если известно, что объем пирамиды равен $\frac{2}{3}$.

7.55. Точка M — середина ребра AD единичного куба $ABCD A'B'C'D'$. Через середину $B'M$ перпендикулярно

$B'M$ проводится плоскость α . Найдите расстояние от центра куба до плоскости α .

7.56. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра AB , BC и BS имеют длину 2 и взаимно перпендикулярны. Через середины ребер AC и SB проведена плоскость, пересекающая ребро AB и образующая равные углы с плоскостями граней ABS и ABC . Найдите величину этих углов.

7.57. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ в основании равнобедренный треугольник ABC со стороной 2, боковые ребра AA_1 , BB_1 , CC_1 равны 1. Точка K — середина ребра AB , точка L — середина ребра B_1C_1 , точка M — середина ребра A_1B_1 , точка N — середина ребра AC . Через прямые KL и MN проведены параллельные плоскости. Найдите объем части призмы, содержащейся между этими плоскостями.

7.58. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник с катетами AB , AC , $AB = 2$, $AC = 4$. Боковые ребра пирамиды равны 4. На луче CA выбраны точки M , N так, что $CM = 1$, $CN = 6$, а на луче BS — точки P , Q так, что $BP = 2$, $BQ = 5$. Найдите объем пирамиды $MNPQ$.

7.59. Все ребра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC равны 1. Призма $AKLA_2K_2L_2$ с боковыми ребрами AA_2 , KK_2 , LL_2 симметрична призме $ABCA_1B_1C_1$ относительно точки A . Точка E принадлежит отрезку AK , $AE : AK = 1 : 3$, точка F принадлежит отрезку K_2L_2 , $K_2F : FL_2 = 3 : 5$. Найдите длину отрезка, по которому прямая EF пересекает призму $ABCA_1B_1C_1$.

7.60. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, $AB = 5$, $BC = 2$. Известно, что $SB = 4$, $SA = 3$, $SC = x$, $SD = y$. При каких значениях x и y объем пирамиды наибольший и чему равен этот объем?

7.61. В основании четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$ со стороной 5 и диагональю AC , $AC = 8$. Шар касается ребер AA_1 , BB_1 , DD_1 и касается плоскости $ABCD$ в точке C . Найдите радиус шара.

7.62. Точка D лежит на ребре BC правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина), $BD : DC = 2 : 3$. Цилиндр касается боковой поверхностью плоскостей SAB и SBC , одно из оснований цилиндра проходит через точку D , второе основание имеет общую точку с ребром SC . Боковая поверхность цилиндра имеет единственную общую точку с ребром AC . Найдите отношение объемов цилиндра и пирамиды.

7.63. Точка M лежит на ребре DC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина), $DM : DC = 1 : 15$. Цилиндр касается боковой поверх-

ностью плоскостей SAD и SCD , одно из оснований цилиндра проходит через точку M , второе основание имеет общую точку с ребром SC . Боковая поверхность цилиндра имеет с высотой SH пирамиды общую точку O , причем $SO : SH = 1 : 3$. Найдите отношение объемов цилиндра и пирамиды.

7.64. Два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ расположены в пространстве так, что центр квадрата $KLMN$ совпадает с серединой стороны AB . Точка A лежит на стороне LM и $AM < AL$, точка N равноудалена от точек B и C . Расстояние от M до ближайшей к ней точки квадрата $ABCD$ равно $2\sqrt{3}$, а расстояние от K до ближайшей к ней точки квадрата $ABCD$ равно 5. Найдите длины сторон квадратов $ABCD$ и $KLMN$ и расстояние от точки N до плоскости $ABCD$.

7.65. На продолжении ребра AA_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (ABC — основание) за точку A_1 взята точка M . Через точку M и точку K — середину ребра BC — проведена плоскость α , пересекающая ребро AC в точке K_1 так, что угол KK_1M равен $\arctg \sqrt{55}$. Сечение призмы плоскостью α — пятиугольник $KK_1K_2K_3K_4$, у которого $K_1K_2 = \frac{7}{2}$, $KK_1 = \frac{\sqrt{14}}{2}$, $K_2K_3 = \frac{3}{8}\sqrt{14}$. Найдите объем призмы.

7.66. Найдите объем шара, вписанного в усеченный конус, образующая которого равна 10 и наклонена к плоскости основания под углом 45° .

7.67. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения, как $\pi : 4$. Найдите угол между диагоналями осевого сечения.

7.68. Основанием пирамиды $SABCD$ служит параллелограмм $ABCD$ с углом $A = 60^\circ$. Боковые грани наклонены к основанию пирамиды под углом α . Найдите угол наклона ребра SA к плоскости основания.

7.69. Найдите объем шара, описанного около усеченного конуса, у которого радиус меньшего основания в 5 раз меньше радиуса большего основания, образующая равна $2\sqrt{5}$ и составляет с основанием угол $\frac{1}{2} \arccos(-\frac{1}{5})$.

7.70. Найдите объем правильного тетраэдра, высота которого равна $4\sqrt{3}$.

7.71. В правильной пятиугольной пирамиде α — двугранный угол при боковом ребре, H — ее высота. Найдите образующую конуса, описанного около пирамиды.

7.72. В правильной треугольной пирамиде задан угол F между высотой и боковым ребром пирамиды. Найдите отношение квадрата апофемы боковой грани к боковой поверхности пирамиды.

7.73. Высота конуса равна 8, а образующая — 10. Определите радиус вписанного шара.

7.74. В конус вписан шар. Поверхность шара относится к площади основания как 4 : 3. Определите угол при вершине конуса.

7.75. Основанием пирамиды служит ромб со стороной, равной 6, и острым углом в 30° . Двугранные углы при основании равны 60° . Найдите полную поверхность пирамиды.

7.76. Основание прямого параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — ромб со стороной a и острым углом α . Меньшая диагональ параллелепипеда образует с основанием угол β . Определите площадь сечения ACB_1 .

7.77. Найдите радиус основания R и высоту H цилиндра, имеющего при данном объеме $V = 16\pi \text{ м}^3$ наименьшую полную поверхность.

7.78. Даны вектор $\vec{a} = (-2; 1; 4)$ и точка $M(1; 0; -1)$.

Найдите координаты точки N , если $2\vec{a} + \overrightarrow{MN} = 0$.

7.79. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник ABC такой, что $AC = CB = b$ и $\angle ACB = \alpha$. Грань пирамиды, проходящая через сторону AB основания, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие образуют с плоскостью основания угол φ . Определите объем пирамиды.

7.80. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 60° . Сторона основания равна 2. Определите боковую поверхность пирамиды.

7.81. В основании пирамиды $SABCD$ с вершиной S лежит равнобокая трапеция $ABCD$ с меньшим основанием $AB = a$ и острым углом α . Высота SO пирамиды равна h . Прямая AO пересекает сторону CD основания в точке K , являющейся ее серединой. Найдите угол, образованный боковой гранью SBC с плоскостью основания, если $AO : OK = 8 : 1$ и $\angle AOB = 90^\circ$.

7.82. Основанием пирамиды является правильный треугольник; одна из боковых граней перпендикулярна к основанию, а две другие наклонены к нему под углом α . Как наклонены к плоскости основания боковые ребра?

7.83. Основание наклонного параллелепипеда — прямоугольник с длинами сторон 5 и 12. Боковое ребро равно диагонали основания и образует с плоскостью основания угол 30° . Найдите объем параллелепипеда.

7.84. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной a , и углом при вершине 120° . Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем пирамиды.

7.85. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды образует с высотой пирамиды угол 45° . Длина боко-

вого ребра равна $2l$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

7.86. В сферу с радиусом R вписана правильная треугольная пирамида, у которой апофема равна диаметру окружности, описанной вокруг основания. Между сферой и пирамидой расположена правильная четырехугольная призма, одно из оснований которой лежит в плоскости боковой грани пирамиды, а вершины другого основания принадлежат сфере. Какой наибольший объем может иметь призма?

7.87. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого AA_1 — одно из ребер, через вершину A , середину ребра $A_1 D_1$ и центр грани $D_1 D C C_1$ проведена плоскость. Из всех сечений куба, параллельных этой плоскости, найдите сечение с наибольшей площадью; определите его площадь, считая длину ребра равной a .

7.88. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с катетами, равными 6 и 8. Все двугранные углы при основании пирамиды равны 60° . Найдите высоту пирамиды.

7.89. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ вписана сфера. Отношение площади основания ABC пирамиды к площади поверхности сферы равно q . Плоскость, параллельная основанию пирамиды, касается сферы и отсекает от пирамиды $SABC$ пирамиду $SA_1 B_1 C_1$. Найдите отношение площадей полных поверхностей пирамид $SABC$ и $SA_1 B_1 C_1$.

7.90. Вершина конуса лежит в плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, а окружность основания конуса вписана в четырехугольник, получившийся в сечении пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AD и BC основания пирамиды и делящей ребро SC в отношении $3:1$, считая от вершины S . Найдите отношение объема конуса к объему пирамиды.

7.91. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 3, а сторона основания равна 2. Вычислите косинус угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

7.92. Найдите радиус шара, объем которого равен объему тела, образованного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника вокруг гипотенузы, длина которой равна $2a$.

7.93. В кубе $ABCD A' B' C' D'$ с ребром a точка M — середина ребра BC , точка N — середина ребра $C' D'$, точка P — середина ребра AA' . Найдите периметр треугольника MNP . Какая из двух частей, на которые разбивается куб плоскостью MNP , имеет больший объем?

7.94. Через сторону PQ нижнего основания правильной треугольной призмы $PQR P_1 Q_1 R_1$ проведена секущая плос-

кость, пересекающая ребро RR_1 и разбивающая призму на два многогранника. Отношение объема многогранника, одной из граней которого является нижнее основание PQR призмы, к объему отсеченного многогранника, одной из граней которого является грань QQ_1P_1P , равно q . Найдите величину угла наклона секущей плоскости к плоскости нижнего основания, если известно, что величина угла между прямыми PQ_1 и RR_1 равна φ .

7.95. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник $ABCD$, диагональ AC которого образует со стороной BC угол величиной α , а с боковым ребром SC — угол величиной β . Пирамида пересечена плоскостью, равноудаленной от всех вершин пирамиды. Найдите площадь образовавшегося сечения, если известно, что все боковые ребра пирамиды имеют длину l .

7.96. В сечении прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием плоскостью получается ромб с острым углом 60° . Под каким углом пересекает плоскость сечения боковые ребра параллелепипеда?

7.97. В сечении прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием плоскостью, не пересекающей квадратных оснований, получается ромб. Найдите внутренние углы ромба, если двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания равен 30° .

7.98. Длина стороны правильного треугольника, лежащего в основании пирамиды, равна 3. Одна из боковых граней пирамиды перпендикулярна основанию, а площади двух других боковых граней равны 5 и 4. На какие по величине отрезки высота пирамиды делит сторону основания?

7.99. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB и углом ACB , равным 120° . Боковая грань, опирающаяся на AB , перпендикулярна основанию пирамиды. Площади двух других боковых граней равны 3 и 2. Найдите стороны треугольника ABC , если сторона AB делится высотой пирамиды на отрезки, длины которых относятся как 2 : 1.

7.100. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной 2. Боковое ребро пирамиды SA перпендикулярно плоскости основания. На ребре SC выбрана точка L так, что $SC = 3SL$. Найдите расстояние между прямой SA и прямой, проходящей через точку L и середину ребра SB .

7.101. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC . Боковое ребро пирамиды SA перпендикулярно плоскости основания. Найдите объем пирамиды, если величина угла между прямой SA и прямой, проходящей через точку C и середину ребра SB , равна 60° , а расстояние между этими скрещивающимися прямыми равно 2.

7.102. Найдите плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды, если этот угол равен углу между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

7.103. Через диагональ AC квадрата, лежащего в основании прямого параллелепипеда, и вершину другого основания параллелепипеда проведена плоскость так, что в сечении получился треугольник ABC с углом при вершине B в два раза большим, чем угол между плоскостью сечения и основанием параллелепипеда. Найдите угол ABC .

7.104. Рассматриваются всевозможные цилиндры с заданным объемом V . В каждый из них вписана 7-угольная призма. Найдите высоту той из этих призм, площадь полной поверхности которой минимальна.

7.105. В правильной треугольной пирамиде известны высота H и величина двугранного угла 2α , образованного боковыми гранями. Найдите длину стороны основания.

7.106. В шар с радиусом R вписана правильная треугольная призма. Высота призмы равна H . Найдите объем призмы.

7.107. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро AB перпендикулярно ребру DC , длина AB равна a , длина DC равна b . Оказалось, что углы, образованные DC с гранями ACB и ABD , равны α . Найдите объем пирамиды.

7.108. Основанием треугольной пирамиды служит правильный треугольник, а двугранные углы при основании равны α , α , $\frac{\pi}{2}$. Найдите объем пирамиды, если известно, что ее высота равна h .

7.109. Около шара описана правильная четырехугольная пирамида, высота которой вчетверо больше диаметра шара. Найдите отношение объема шара к объему пирамиды.

7.110. Параллельными плоскостями в трехгранном угле отсечены две пирамиды с объемами U и V ($U < V$). Найдите объем третьей пирамиды, если ее основание совпадает с основанием меньшей, а вершина лежит на основании большей пирамиды.

7.111. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA' , BB' , CC' , DD' . Длина ребра куба равна единице. Через прямую $B'C$ проведена плоскость, пересекающая ребро AB и составляющая угол в 60° с прямой $A'B$. В каком отношении эта плоскость делит ребро AB ?

7.112. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA' , BB' , CC' , DD' . Длина ребра куба равна единице. Точки M и N — середины CD и CC' соответственно. Найдите расстояние между прямыми AN и BM .

7.113. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 4$,

$BC = 2$. Длины всех боковых ребер равны 3, точка M — середина AS . Через прямую BM параллельно диагонали AC проведена плоскость. Определите величину угла между этой плоскостью и плоскостью SAC .

7.114. Даны четыре точки A, B, C, D , не лежащие в одной плоскости. Сфера касается прямых AB и AD в точке A и прямых BC и CD в точке C . Найдите площадь сферы, если известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$.

7.115. В пирамиде $SABC$ основание H высоты SH лежит на медиане CM основания ABC . Точка O , являющаяся серединой высоты SH , находится на одинаковых расстояниях от точки S , точки E , лежащей на ребре SA , и точки F , лежащей на ребре SB . Известно, что $SH = 8$,

$AB = 16\sqrt{2}$, $EF = 8\sqrt{\frac{2}{5}}$, угол SMC не больше 30° , а рас-

стояние между серединами ребер AB и SC равно $4\sqrt{13}$. Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SABC$.

7.116. В правильной треугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найдите отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к стороне основания пирамиды.

7.117. В правильной четырехугольной пирамиде отношение высоты пирамиды к стороне основания равно 2. Найдите отношение радиуса описанного около пирамиды шара к апофеме пирамиды.

7.118. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC , сторона которо-

го равна $4\sqrt{3}$. Известно, что $AS = BS = 8$, а двугранный угол между гранями ABC и ABS равен $\arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$. Най-

дите радиус сферы, описанной около этой пирамиды.

7.119. Отрезок PQ параллелен плоскости, в которой лежит прямоугольник $KLMN$, причем $KL = 1$, $PQ = 3$. Все стороны прямоугольника $KLMN$ и отрезки KP , LP , NQ , MQ , PQ касаются некоторого шара. Найдите объем этого шара.

7.120. Точка D является серединой ребра BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. На боковой грани AA_1C_1C взята точка E , на основании ABC — точка F так, что прямые EB_1 и FD параллельны. Какой наибольший объем может иметь призма $ABCA_1B_1C_1$, если $EB_1 = 1$,

$FD = \frac{3}{4}$, $EF = \frac{1}{2\sqrt{3}}$?

7.121. Сфера с радиусом 13 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и AA_1B_1B куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$. Вторая сфера с радиусом 5 касается граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D куба и касается первой сферы. На ребре BC взята точка F , на продолжении ребра DC за точку C — точка E так, что $CE = CD$. Плоскость C_1EF пересекает первую сферу по окружности, радиус которой в 2,6 раза больше радиуса окружности, по которой эта плоскость пересекает вторую сферу. Найдите отношение $BF : FC$.

7.122. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 6$, $BC = 9$. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей

AC и BD и равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Точки E и F лежат на ребрах AB

и AD соответственно, $AE = 4$, $AF = 6$. Найдите площадь пятиугольника, полученного при пересечении пирамиды с плоскостью, проходящей через E и F и параллельной AS .

7.123. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ отрезок AD — высота основания ABC . Конус с вершиной A и образующей AD касается своей боковой поверхностью основания ABC и боковых граней ASC и ASB пирамиды. Известно, что $AD / SD = m$. Найдите:

а) отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания пирамиды;

б) в каких границах может изменяться это отношение при изменении m ;

в) при каких m конус не имеет точек, находящихся вне пирамиды.

7.124. В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $2\sqrt{3}$, и $SA = SB = SC =$

$= \sqrt{7}$. В трехгранный угол при вершине C вписана сфера S_1 . Сфера S_2 , радиус которой втрое больше, чем у сферы S_1 , касается сферы S_1 , плоскостей SAC и ABC . При этом отрезок прямой SB , заключенный внутри сферы S_2 , имеет длину $\frac{6}{\sqrt{7}}$. Найдите радиус сферы S_2 .

7.125. Длины ребер правильного тетраэдра $KMNL$ равна $2\sqrt{6}$. Сфера S_1 с центром в точке O_1 касается граней MNL , KML , KNL . Сфера S_2 с центром в точке O_2 касается сферы S_1 и плоскостей KML , MNL . Найдите радиус сферы S_1 , если длина отрезка O_1O_2 в два раза больше диаметра сферы S_1 , а расстояние от точки O_2 до ребра KN равно $\sqrt{7}$.

7.126. В треугольной пирамиде $SABC$ площадь основания ABC равна 14, а углы ABC , ASB и двугранный угол при ребре AB прямые. Рассматриваются проекции пирамиды $SABC$ на всевозможные плоскости, проходящие через прямую AB . Наибольшая из площадей таких проекций равна 21, а наименьшая — $6\sqrt{5}$. Найдите объем пирамиды.

7.127. В основании пирамиды $SABC$ лежит остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с площадью 1,5. Ребро SA — высота пирамиды. Рассматриваются проекции пирамиды $SABC$ на всевозможные плоскости, проходящие через прямую AB . Наибольшая из площадей таких проекций равна 2,5, а наименьшая — $\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды.

7.128. Дана правильная пирамида $SABCD$ и конус, центр основания которого лежит на прямой SO (SO — высота пирамиды). Точка E лежит на ребре SD , причем $SE = 2ED$, точка F — середина ребра AD . Треугольник, являющийся одним из осевых сечений конуса, расположен так, что две его вершины лежат на прямой CD , а третья — на прямой EF . Найдите объем конуса, если $AB = 1$, $SO = \sqrt{3}$.

7.129. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ и цилиндр, центр симметрии которого лежит на прямой SO (SO — высота пирамиды). Точка E — середина апофемы грани BSC , точка F принадлежит ребру SD , причем $SF = 2FD$. Прямоугольник, являющийся одним из осевых сечений цилиндра, расположен так, что две его вершины лежат на прямой AB , а одна из двух других вершин лежит на прямой EF . Найдите объем цилиндра, если $SO = 12$, $AB = 4$.

7.130. Боковые ребра AE , BF , CG треугольной призмы $ABCEFG$ перпендикулярны основаниям. Сфера касается плоскости основания ABC призмы, а также продолжений отрезков AF , BG и CE за точки A , B и C соответственно. Найдите радиус сферы, если известно, что боковые ребра имеют длину 4, а длины всех ребер оснований равны 3.

7.131. Сфера, вписанная в треугольную пирамиду $KLMN$, касается одной из граней пирамиды в центре вписанной в эту грань окружности. Найдите объем пирамиды, если $MK = \frac{5}{4}$, $\angle NMK = \frac{\pi}{2}$, $\angle KML = 3 \arctg \frac{1}{3}$, $\angle NML = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{1}{3}$.

7.132. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основанием является трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$), $BC = \frac{4}{5} AD$, $\angle ASD = \angle CSD = \angle CDS = \frac{\pi}{2}$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований цилиндра, высота которого равна 2, а радиус основания $\frac{5}{3}$. Найдите объем пирамиды.

7.133. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом при вершине A . Высота ромба равна 4, точка пересечения его диагоналей является ортогональной проекцией вершины S на плоскость основания. Сфера с радиусом 2 касается плоскостей всех граней пирамиды. Найдите объем пирамиды, если расстояние от центра сферы до прямой AC равно $\frac{2\sqrt{2}}{3} AB$.

7.134. В треугольной пирамиде $ABCD$ плоские углы BAC , BAD и CAD при вершине A равны $2\pi/3$, $\pi/4$ и $3\pi/4$ соответственно. Определите угол между гранями BAD и CAD .

7.135. Три шара с радиусами, равными R , касаются друг друга, и каждый из них касается боковой поверхности конуса. Шары находятся вне конуса. Высота конуса перпендикулярна плоскости α , содержащей центры шаров. Угол между высотой и образующей конуса равен φ . Найдите расстояние от вершины конуса до плоскости α .

7.136. В тетраэдре $KLMN$ на ребре KL взята точка A , на ребре KM — точка B , на ребре NL — точка D , на ребре MN — точка C . Точки P , R — середины ребер KN и LM соответственно. Прямые PR , AC , BD пересекаются в одной точке. Чему равна площадь четырехугольника $ABCD$, если $KN = 10$, $LM = 15$, $KA : AL = 4$, а угол между скрещивающимися прямыми KN и ML равен 45° ?

7.137. На прямой l в пространстве последовательно расположены точки A , B и C такие, что $AB = 18$ и $BC = 14$. Найдите расстояние между прямыми l и m , если расстояния от точек A , B и C до прямой m равны 12, 15 и 20 соответственно.

Глава 8

Тригонометрия

Произвольный угол.

Определения тригонометрических и обратных тригонометрических функций

8.1. Стрелки показывают ровно 12 часов. Через сколько времени минутная стрелка вновь совместится с часовой?

8.2. Сравните:

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| а) $\sin 1$ и 1 ; | б) $\sin 1$ и $0,5$; |
| в) $\operatorname{tg} 1$ и 1 ; | г) $\operatorname{ctg} 1$ и 1 ; |
| д) $\sin 0,63$ и $\cos 0,87$; | е) $\sin 0,91$ и $\cos 0,57$; |
| ж) $\sin 1,4$ и $\cos 0,11$; | з) $\sin \frac{5\pi}{12}$ и $\cos \frac{\pi}{4}$; |
| и) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$ и $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}$. | |

8.3. Решения уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ образуют две (бесконечные в обе стороны числовой оси) арифметические прогрессии. Найдите: а) разности этих прогрессий; б) наименьшее из расстояний между членами этих прогрессий.

8.4. Какой четверти координатной плоскости принадлежат углы:

- а) 5875° ; б) -2990° ; в) 3140° ; г) $\frac{781}{11}\pi$; д) $-4,86$; е) $-3,14$;

- ж) $\arcsin \left[-\frac{\sqrt{3}}{3} \right]$; з) $\operatorname{arccctg} \frac{3}{2}$; и) $\arccos \left[-\frac{\pi}{4} \right]$?

8.5. Упростите:

- а) $\arcsin(\sin 13)$; б) $\arcsin(\sin 4)$; в) $\arccos(\cos 10)$;
г) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 34)$.

8.6. Сравните:

- а) $\arcsin 1$ и 1 ; б) $\operatorname{arctg} 0$ и 1 ; в) $\arcsin \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$;
г) $\arccos \left[-\frac{1}{2} \right]$ и 2 ; д) $\sin \left[\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$ и $\frac{3}{4}$;

е) $\arccos (\cos 10)$ и $\frac{5\pi}{6}$; ж) $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} 5)$ и $-\frac{1}{2}$.

Простейшие тригонометрические уравнения.

8.7. Найдите все решения уравнений:

а) $\sin \left[2x - \frac{5\pi}{12} \right] = -\frac{1}{2}$; б) $\operatorname{ctg} (x^2 - x) = 1$;

в) $\cos (3x + 1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8.8. Найдите все $x \in \left[-3\pi; -\frac{5\pi}{2} \right]$, при которых:

а) $\operatorname{tg} \left[2x - \frac{3\pi}{8} \right] = \sqrt{3}$; б) $\sin \left[4x + \frac{5\pi}{12} \right] = 1$;

в) $\cos \left[-5x - \frac{4\pi}{9} \right] = 1$;

г) $\operatorname{ctg} \left[\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{4} \right] = \frac{1}{2}$; д) $\sin \left[\frac{x}{4} - 1 \right] = 0$;

е) $\cos \left[\frac{x}{4} - 1 \right] = 0,9$.

8.9. Решите уравнения:

а) $\arccos (x - 2) = \frac{\pi}{3}$; б) $\arcsin (x^2 + 2x - 4) = \frac{\pi}{6}$;

в) $\operatorname{arctg} 2^x = \frac{\pi}{4}$; г) $\operatorname{arccotg} (\operatorname{tg} 3x) = -\frac{\pi}{4}$.

Формулы, связывающие разные тригонометрические функции одного и того же угла

8.10. Упростите выражения:

а) $\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta$;

$$б) \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}; \quad в) \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sec \alpha - \operatorname{cosec} \alpha};$$

$$г) \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha}; \quad д) \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}};$$

$$е) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}; \quad ж) \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha.$$

8.11. Найдите $\frac{3 \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}$; если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

8.12. Найдите $\sin \alpha \cos \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$.

8.13. Найдите $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$.

8.14. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций

а) $y = 3 \sin^2 x - 2 \cos^2 x$; б) $y = 2 \sin x - \sin^2 x + 2 \cos^2 x$.

8.15. Исключите α из систем:

$$а) \begin{cases} \operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha = x, \\ \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = y; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \sin \alpha - \cos \alpha = x, \\ \sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha = y. \end{cases}$$

8.16. Верны ли равенства:

а) $\sin^2 \alpha (\operatorname{ctg} \alpha + 2)(2 \operatorname{ctg} \alpha + 1) - 2 = 5 \sin \alpha \cos \alpha$;

б) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$;

в) $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = 1 + \cos^2 \alpha$;

г) $\cos^3 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) + \sin^3 \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha$;

д) $\left[\frac{\cos \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \right] : (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha - 1) = \sin \alpha + \cos \alpha$;

$$e) \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$ж) \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{tg} \alpha) = \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha?$$

8.17. Докажите тождества:

$$a) 3 (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2 (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 1;$$

$$б) (\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha)(\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) = (1 + \sin \alpha)(1 + \cos \alpha);$$

$$в) \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha.$$

Решите уравнения:

$$8.18. 2 \cos^2 x + 5 \sin x + 1 = 0.$$

$$8.19. \sin^4 x - \cos^4 x = 1.$$

$$8.20. \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} = -2.$$

$$8.21. \frac{2 \sin x}{3 + 2 \cos x} = \operatorname{ctg} x.$$

$$8.22. 5 \sin^2 x + 8 \cos x + 1 = |\cos x| + \cos^2 x.$$

$$8.23. \cos x = \frac{3 \sin^2 x - 1}{\sin x}.$$

$$8.24. (\sin^3 x - \cos^3 x) = 1 + \sin x \cos x.$$

$$8.25. 6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2.$$

$$8.26. 10 \cdot 4^{\frac{1}{\sin^2 x}} - 16 = 4^{2 \operatorname{ctg}^2 x + 2}.$$

$$8.27. 2^{|x-2|} \sin x = \left[\sqrt{2} \right]^x |\sin x|$$

$$8.28. \sin \left[\frac{4\pi}{3} \sin x \right] = \frac{1}{2}.$$

$$8.29. \sqrt{\sin^3 x - \cos^3 x} = \sqrt{-\cos x}.$$

$$8.30. \sqrt{\sin x \cos^2 x - \frac{1}{4}} = \sqrt{\sin^3 x - \frac{1}{4}}.$$

$$8.31. \sqrt{1 - \sqrt{3} \sin x + \sqrt{10} \cos x} = 0.$$

$$8.32. \sin \left[\frac{1}{2 \cos x} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$8.33. \left[\sqrt{2x - \operatorname{ctg} x} + 1 \right] (8x^2 - 18x + 7) = 0.$$

$$8.34. \sqrt{4 + 3x - x^2 \sin x} = 0.$$

8.35. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg} (4 \sin x) = \sqrt{3},$$

удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

8.36. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{\operatorname{tg} x + \sin x} + \sqrt{\operatorname{tg} x - \sin x} = \sqrt{3 \operatorname{tg} x}$$

на отрезке $[0; \pi]$.

8.37. Найдите все решения неравенства

$$(4x - x^2 - 3) \log_2 (\cos^2 \pi x + 1) \geq 1.$$

Теоремы сложения

8.38. Найдите: а) $\sin 75^\circ$; б) $\operatorname{tg} 105^\circ$; в) $\cos 15^\circ$.

8.39. Пусть α , β и γ — острые углы. Докажите, что:

а) если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$, то $\alpha + \beta = 45^\circ$;

б) если $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\operatorname{tg} \beta = 3$, то $\alpha + \beta = 135^\circ$;

в) если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{7}$, то $\alpha - \beta = 45^\circ$;

г) если $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{8}$, то $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$.

8.40. Пусть $\cos(\alpha + \beta) = 0,3$; $\cos(\alpha - \beta) = 0,8$. Найдите $\sin \alpha \sin \beta$.

8.41. Найдите: а) $\cos \left[\arcsin \frac{12}{13} + \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \right]$;

б) $\sin \left[\arccos \frac{5}{13} + \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \right]$.

8.42. Упростите:

а) $\operatorname{arctg} 2,4 - \arccos \frac{3}{5}$;

б) $\operatorname{arctg} 0,75 + \arcsin \left[-\frac{15}{17} \right]$.

8.43. а) Пусть $\operatorname{tg} \left[\frac{3\pi}{8} + \alpha \right] = 2$. Найдите $\operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{8} + \alpha \right]$.

б) Пусть $\cos(25^\circ - \alpha) = \frac{-7}{25}$, $-125^\circ < \alpha < -100^\circ$.

Найдите $\sin(55^\circ - \alpha)$.

8.44. Упростите:

а) $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}$;

б) $\cos 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha \sin 2\alpha$;

в) $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$; г) $\cos \frac{2\pi}{7} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7}$;

д) $\sin \frac{4\pi}{11} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{11} - \cos \frac{4\pi}{11}$.

8.45. Докажите тождества:

а) $\cos \alpha + \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha) = 0$;

$$б) \cos^2 \alpha + \cos^2 (60^\circ + \alpha) + \cos^2 (60^\circ - \alpha) = \frac{3}{2};$$

$$в) \sin^2 \alpha + \sin^2 (120^\circ + \alpha) + \sin^2 (120^\circ - \alpha) = \\ = \cos^2 \alpha + \cos^2 (60^\circ + \alpha) + \cos^2 (60^\circ - \alpha);$$

$$г) \frac{\sin^2 (\alpha + \beta) + \sin^2 (\alpha - \beta)}{2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta} = \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta;$$

$$д) \cos (\alpha + \gamma) \cos \gamma - \cos (\alpha + \beta) \cos \beta = \\ = \sin (\alpha + \beta) \sin \beta - \sin (\alpha + \beta) \sin \gamma;$$

$$е) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) \operatorname{ctg} (\alpha + \beta) = 1;$$

$$ж) \operatorname{tg} (\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} (\alpha + \beta) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta;$$

$$з) \operatorname{tg} (45^\circ + \alpha) - \operatorname{tg} \alpha = 1 + \operatorname{tg} (45^\circ + \alpha) \operatorname{tg} \alpha.$$

8.46. Исклучите α из систем уравнений:

$$а) \begin{cases} \operatorname{tg} (22,5^\circ + \alpha) = a, \\ \operatorname{tg} (22,5^\circ - \alpha) = b, \\ 0 < \alpha < 22,5^\circ; \end{cases} \quad б) \begin{cases} \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{3} + \alpha \right] = a, \\ \operatorname{tg} \left[\alpha - \frac{\pi}{3} \right] = b. \end{cases}$$

8.47. Решите уравнения:

$$а) \frac{1}{2} \sin \left[\frac{\pi}{4} + x \right] = \cos \left[\frac{\pi}{4} - x \right];$$

$$б) \cos 2x \cos x = \sin 2x \sin x;$$

$$в) \cos 2x \cos 3x = \cos 5x;$$

$$г) \operatorname{tg} \left[x + \frac{\pi}{4} \right] + \operatorname{tg} \left[x - \frac{\pi}{4} \right] = 2 \operatorname{ctg} x;$$

$$д) \sqrt{\sin x \cos 2x - \frac{1}{3}} = \sqrt{-\cos x \sin 2x - \frac{1}{3}};$$

$$е) \sqrt{2} \cos \left[x + \frac{\pi}{4} \right] - \sin x = |\cos x|;$$

ж) $\cos 4x = \sin 5x \sin x$.

8.48. Пусть $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$. Докажите, что:

а) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$; б) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{tg} \beta) = 2$.

Формулы приведения

8.49. Упростите:

а) $\sin(-523^\circ) \cos(-287^\circ) - \operatorname{ctg}(-296^\circ) \operatorname{tg}(-604^\circ)$;

б) $\sin \left[\frac{\pi}{5} - \alpha \right] \operatorname{ctg} \left[\frac{4\pi}{5} + \alpha \right] \cos \left[\frac{9\pi}{5} + \alpha \right] +$
 $+ \operatorname{ctg}(\pi + \beta) \operatorname{ctg} \left[\frac{3\pi}{2} - \beta \right];$

в) $\sin 160^\circ \cos 110^\circ + \sin 250^\circ \cos 340^\circ + \operatorname{tg} 110^\circ \operatorname{tg} 340^\circ$;

г) $\frac{\sin 110^\circ \sin 250^\circ + \cos 540^\circ \cos 290^\circ \cos 430^\circ}{\cos^2 1260^\circ}.$

8.50. Докажите тождества:

а) $\frac{\sin^2(-212^\circ) \cos 302^\circ + \cos^2(-148^\circ)}{\sin(-82^\circ) \cos(-8^\circ) \sin 368^\circ \sin(-172^\circ) - \sin 58^\circ \sin 148^\circ} =$
 $\cos 32^\circ - \sin 32^\circ;$

б) $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = 1$;

в) $\sin^2(30^\circ + \alpha) + \sin^2(240^\circ - \alpha) = 1$.

8.51. Решите уравнения:

а) $\sin(x - \pi) = \cos \left[\frac{3\pi}{2} - x \right];$

б) $\sin^2 \left[x - \frac{3\pi}{2} \right] + 2 \cos(2\pi - x) = 3;$

$$\text{в) } \cos \left[x + \frac{\pi}{6} \right] = \sin \left[x - \frac{\pi}{3} \right];$$

$$\text{г) } \operatorname{tg} (x - 200^\circ) = \operatorname{tg} (x - 20^\circ).$$

Формулы удвоения и деления пополам

8.52. Найдите:

$$\text{а) } \cos (2 \operatorname{arctg} 2); \quad \text{б) } \operatorname{tg} \left[2 \arcsin \frac{5}{13} \right];$$

$$\text{в) } \sin \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \right]; \quad \text{г) } \cos \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{12}{13} \right].$$

8.53. Вычислите:

$$\text{а) } \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \sin 4\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha + \sin 4\alpha}, \text{ если } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2}{15};$$

$$\text{б) } \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha} + \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha},$$

$$\text{если } \cos 4\alpha = \frac{1}{2}.$$

8.54. Докажите тождества:

$$\text{а) } \cos^3 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha;$$

$$\text{б) } \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha - 6}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2} = \cos 4\alpha;$$

$$\text{в) } \sin 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{8};$$

$$\text{г) } \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{5}; \quad \text{д) } \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -\frac{1}{8} \sec \frac{\pi}{7};$$

$$е) \frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha};$$

$$ж) \cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta = 1;$$

$$з) \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha;$$

$$и) \frac{1 - \cos \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$к) \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \operatorname{ctg} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right];$$

$$л) \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \operatorname{tg}^2 \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right];$$

$$м) \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha;$$

$$н) \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right] + \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right] = \frac{2}{\cos \alpha}.$$

8.55. Упростите:

$$а) \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}; \quad б) \frac{\operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha) - 1}{\operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha) + 1}; \quad в) \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\alpha}{4}}{2}};$$

$$г) \sqrt{\frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) + 1}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + 1}}; \quad д) \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{1 + \sin 2\alpha} - \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha};$$

$$е) \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{8 \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \alpha) \cos^2(\frac{\pi}{4} - \alpha)}.$$

8.56. Исключите α из систем:

$$\text{а) } \begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = x, \\ \sin 2\alpha = y; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sin \alpha = x, \\ \cos 2\alpha = y. \end{cases}$$

8.57. Решите уравнения:

а) $\sin^2 x - \cos^2 x = 0,5$; б) $1 + \sin^2 2x = 4 \sin^2 x$;

в) $\cos 2x = 2 \sin^2 x$; г) $1 - \cos x = \sin x$;

д) $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$; е) $4 \sin x + 3 \cos x = 2$;

ж) $\frac{2 \sin^4 \frac{x}{2} - 1}{\cos^4 \frac{x}{2}} = 2$; з) $\cos 4x + 2 \cos^2 x = 1$;

и) $\sin 2t \cos 2t (\sin^4 2t + \cos^4 2t - 1) = \frac{\sin^2 4t}{2}$;

к) $\cos^6 x - \sin^6 x = \cos^2 2x$; л) $\sin^6 x + \cos^6 x = \cos^4 2x$;

м) $3(\sin x - \cos x)^2 - 2 \cos^2 2x = 3$;

н) $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 2x + \frac{1}{4}$;

о) $\frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} + 2 \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} - 3 = 0$.

8.58. Найдите сумму корней уравнения

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1,$$

лежащих в интервале $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2} \right]$.

Преобразование суммы функций в произведение

8.59. Преобразуйте в произведение или частное:

а) $\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$; б) $1 + \sin \alpha - \cos \alpha$;

в) $\sin \alpha + \sin 2\alpha - \sin 3\alpha$;

- р) $1 + \cos \alpha + \cos \varphi + \cos (\varphi + \alpha)$;
 д) $\cos 12^\circ - 2 \cos 24^\circ + \cos 36^\circ$;
 е) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha$; ж) $\frac{1 - \cos 50^\circ}{\cos 40^\circ}$; з) $\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha$;
 и) $1 - 2 \cos \alpha$; к) $3 - 4 \cos^2 \alpha$; л) $\cos x + \sin x - \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;
 м) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$;
 н) $\cos 2\alpha + \cos \left[2\alpha - \frac{8\pi}{3} \right] + \cos \left[2\alpha + \frac{2\pi}{3} \right]$;
 о) $\frac{\cos^2 56^\circ - \sin^2 4^\circ}{\cos 52^\circ}$.

8.60. Докажите тождества:

- а) $\cos 35^\circ + \cos 85^\circ - \cos 25^\circ = \sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ - \alpha)$;
 б) $\frac{\cos 20^\circ - \cos 50^\circ}{\sin 11^\circ + \cos 31^\circ} = \frac{\sin 80^\circ - \sin 70^\circ}{\sin 29^\circ - \sin 19^\circ}$;
 в) $\frac{\sin 14^\circ + \sin 28^\circ - \sin 42^\circ}{\sin 42^\circ + \sin 14^\circ - \sin 56^\circ} = \frac{1}{2 \cos 14^\circ}$;
 г) $(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)^2 + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)^2 = 4 \cos^2 \alpha$;
 д) $\cos^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{2} = -2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{2}\right)$;
 е) $\cos^2 \beta + \cos^2 \alpha - \sin^2 (\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta)$;
 ж) $\frac{\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$;
 з) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \sin 2\alpha$;
 и) $\frac{\sin^2 \alpha - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha - 4 + 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}$;
 к) $\frac{(\cos \alpha + \cos \frac{\alpha}{2})^2 + (\sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2})^2}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$;

$$л) \sin \alpha + \cos \alpha - \sin(\alpha - \frac{\pi}{6}) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{6} \cos(\alpha - \frac{\pi}{12});$$

$$м) \cos(\frac{3\pi}{10} - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{10} - \alpha) - \cos(\frac{3\pi}{10} + \alpha) + \cos(\frac{\pi}{10} + \alpha) = \sin \alpha.$$

8.61. Решите уравнения:

$$а) \cos x + \cos 3x = \cos 2x; б) \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 4x = 2;$$

$$в) \sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0; г) \cos 3x = \sin 2x + \cos x;$$

$$д) \sin y + \cos 3y = 1 - 2 \sin^2 y + \sin 2y;$$

$$е) \cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2;$$

$$ж) \sin x + \sin 3x + 4 \cos^3 x = 0; з) \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x = 4 \sin x;$$

$$и) \cos(3x + 5) - \cos(x + 1) = 2 \sin(x + 2).$$

8.62. Сколько корней уравнения $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1$ лежит на отрезке $[3; 10]$?

8.63. Найдите все решения уравнения $\sin x + \cos 3x = 0$, удовлетворяющие неравенству $\sin \frac{x}{2} +$

$$+ \cos \frac{x}{2} > 0.$$

8.64. Решите уравнения:

$$а) \sqrt{\frac{1}{2} + \sin x} = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin 3x}; б) \sin x = \sqrt{\sin^2 3x - \sin^2 2x}.$$

Преобразование произведения функций в сумму

8.65. Упростите:

$$а) \frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ;$$

$$б) \sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 30^\circ \sin 40^\circ \sin 50^\circ \sin 60^\circ \sin 70^\circ \sin 80^\circ;$$

$$в) \cos^2(\frac{\pi}{2} - \alpha) - \sin(\frac{2\pi}{3} - \alpha) \sin(\alpha - \frac{\pi}{3}).$$

8.66. Докажите тождества:

$$а) \sin \alpha - 2 \sin(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ) \cos(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ) = \frac{1}{2};$$

$$б) \sin^2 \alpha + \cos(\frac{\pi}{3} - \alpha) \cos(\frac{\pi}{3} + \alpha) = \frac{1}{4};$$

$$\text{в) } \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} ;$$

$$\text{г) } \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos n\alpha = \frac{\sin \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} ;$$

$$\text{д) } \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \dots + \sin((2n-1)\alpha)}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos((2n-1)\alpha)} = \operatorname{tg} n\alpha.$$

8.67. Вычислите без таблиц и калькулятора:

$$\text{а) } \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{6\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} ;$$

$$\text{б) } \sin^2 \frac{\pi}{11} + \sin^2 \frac{2\pi}{11} + \sin^2 \frac{3\pi}{11} + \sin^2 \frac{4\pi}{11} + \sin^2 \frac{5\pi}{11} ;$$

$$\text{в) } \sin^4 \frac{\pi}{9} + \sin^4 \frac{2\pi}{9} + \sin^4 \frac{3\pi}{9} + \sin^4 \frac{4\pi}{9} .$$

8.68. Решите уравнения:

$$\text{а) } \sin x \sin 3x = 0,5; \quad \text{б) } \cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4} ;$$

$$\text{в) } \cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x;$$

$$\text{г) } \cos (2\pi - 5x) + 2 \sin 2x \sin 3x = \frac{3}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{3}{2}} ;$$

$$\text{д) } \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} - \sin x \sin 3x - \sin 2x \sin 3x = 0.$$

Линейное уравнение относительно синуса и косинуса

8.69. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций:

$$\text{а) } y = \sin x - \sqrt{3} \cos x; \quad \text{б) } y = 2 \sin x + 3 \cos x - 8;$$

$$\text{в) } f(x, y) = \cos x + \cos y - \cos (x + y).$$

8.70. Найдите наименьшие значения функций:

$$\text{а) } y = \frac{2 + \sqrt{3} \cos x}{\sqrt{3} \sin x} \quad \text{при } 0 < x < \pi;$$

б) $y = \frac{a(2 - \cos x)}{\sin x}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $a > 0$.

8.71. Докажите что:

а) $|\sin x + \cos x| < 2^{|\sin x| + 0,5}$;

б) $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

8.72. Решите уравнения:

а) $\cos 2x + 4 \sin^2 x = \sqrt{3} \sin 2x$;

б) $8 \cos^2 x - 7 \sin 2x = 5$; в) $3 \sin 2x - 4 \cos 2x = 5$;

г) $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin x + \sqrt{3}$;

д) $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = (\sin x + \cos x) \sin 2x$;

е) $5 \sin^2 x + 3 \sin 2x - 3 \cos^2 x = 4$;

ж) $1 - (2 \cos x + \sqrt{3}) \operatorname{ctg} x = 2 \sin x$;

з) $\sqrt{4 \cos 2x - 2 \sin 2x} = 2 \cos x$;

и) $\sqrt{\sin 2x - 2 \cos 2x} = \sqrt{2} \sin x$;

к) $2 \sin(x + \frac{\pi}{6}) + \sqrt{3} \sin x + |\cos x| = 0$.

8.73. а) Найдите все значения x из интервала $(0; 4)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sin^2 x - \sqrt{3} \sin 2x - \cos^2 x = -2.$$

б) Какие корни уравнения

$$\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x \cos \pi x + \sin \pi x} = \sqrt{2}$$

принадлежат отрезку $[-3; 1]$?

в) Найдите корни уравнения

$$\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi x}{2}} \sin \pi x - \cos \pi x = 2,$$

лежащие на отрезке $[-3; 2]$.

г) Сколько корней имеет уравнение

$$\sqrt[3]{3} \sin x + 2 \cos x = \sqrt[3]{3} + \sin 2x$$

на интервале $0 < x < 2\pi$?

Формулы тройных углов

8.74. Решите уравнения:

а) $\sin 3x - 4 \sin x \cos x = 0$;

б) $3 \sin x + 2 \sin 2x = \sin 3x$;

в) $2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \sin 3x$;

г) $4 \sin^3 x \cos 3x + 4 \cos^3 x \sin 3x = 3 \sin 2x$;

д) $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} + 2 \operatorname{tg} x = 0$;

е) $\sqrt[3]{3} \cos^3 x - 3 \cos^2 x - 3 \sqrt[3]{3} \cos x + 1 = 0$.

8.75. При каких значениях a уравнения $\sin x = 2 \sin^2 x$ и $\sin 3x = (a + 1) \sin x - 2|a - 1| \sin^2 x$ равносильны?

8.76. Найдите углы равнобедренного треугольника, если его основание m и боковая сторона n связаны уравнением

$$m^3 + n^3 = 3mn^2.$$

Оценки значений тригонометрических функций.

Неравенства

8.77. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 3 \sin x - \sin 3x$ на отрезке $[0; \frac{2\pi}{3}]$.

8.78. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \cos 2x + 2 \cos x$ на отрезке $[-\pi; \frac{\pi}{3}]$

8.79. Пусть $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$, причем $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Найдите $y_{\min}^2 + y_{\max}^2$.

8.80. Решите уравнения:

а) $\cos^2 x + \cos \frac{x}{2} \cos^2 x - \cos \frac{x}{2} - 1 = 2 \left(\sin \frac{x}{4} - \cos x\right)^2$;

б) $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{4}{5}$; в) $\cos 10x - \cos 7x = 2$;

г) $\cos(\pi \sqrt{x-4}) \cos(\pi \sqrt{x}) = 1$;

$$д) \cos^2\left(\frac{\pi}{4}(\sin x + \sqrt{2} \cos^2 x)\right) - \operatorname{tg}^2\left(x + \frac{\pi}{4} \operatorname{tg}^2 x\right) = 1;$$

$$е) \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 5 \operatorname{tg}^2 5x + 5 \operatorname{ctg}^2 5x = 12;$$

$$ж) x^2 + (x+1) \sin \frac{\pi x}{6} = \frac{3+x}{2}; \quad з) 4 \arctg x = \frac{\pi}{x};$$

$$и) \arcsin(x^2 - 2x + 2) = \frac{\pi x}{2};$$

$$к) \operatorname{tg} \frac{\pi}{x^2+4x+7} = \frac{\sqrt{3}}{\sin\left(\pi + \frac{\pi x}{4}\right)};$$

$$л) 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x;$$

$$м) \cos^4(\operatorname{arccctg} x) + \sin^4(\operatorname{arccctg} x) = \operatorname{cosec}^2(\operatorname{arccctg} x);$$

$$н) 2^{\cos^4 2x} = \frac{\sin 3x - \cos 3x}{\sqrt{2}}; \quad о) 3^{\sin x} = 4 - \cos^2 \frac{4x}{3};$$

$$п) \sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 3x = \sin x \sin^2 3x.$$

8.81. Найдите пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие условиям:

$$а) \sin \pi x + \sin 5\pi x = y^2 + 2y + 3;$$

$$б) \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{x}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{x}} = 4y - y^2;$$

$$в) \cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2};$$

$$г) 4x^2 - 4x \sin xy + 1 = 0;$$

$$д) \left[\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \right]^2 + \left[\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \right]^2 = 12 + \frac{1}{2} \sin y;$$

$$е) \operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2 \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y).$$

8.82. Решите неравенства:

$$а) \frac{15}{\cos x + 1} < 11 - 2 \cos x;$$

$$6) 3 \sin 2\pi x \geq \sqrt{2} \sin 4\pi x + 3 \cos 2\pi x + \sqrt{32};$$

$$в) \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \leq \frac{\sin x - 3}{\sqrt{2}};$$

$$г) \sin 2x + \sin x - 1 \geq \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - x\right);$$

$$д) \sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}; \quad е) \sqrt{2 \sin x} < 1;$$

$$ж) \cos(2 - 4x) + \cos(2 + 4x) \geq \sqrt{2 \cos^2 2x + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}}.$$

8.83. Найдите все решения неравенства

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \sqrt{3} \cos x - 2 \leq 0,$$

удовлетворяющие условию $|x| \leq \frac{\pi}{4}$.

8.84. Найдите все решения неравенства

$$\sqrt{\frac{1}{2} - \cos 2x} > \sin x - \cos x,$$

удовлетворяющие условию $0 \leq x \leq \pi$.

8.85. Найдите решения неравенства

$$\frac{1}{1 - \operatorname{ctg} x} \leq \sqrt{1 + \operatorname{ctg} x},$$

лежащие на отрезке $[0; \pi]$.

Глава 9

Элементы математического анализа

9.1. Постройте графики функций:

$$а) y = 2x + |x - 3|; \quad б) y = |3 + 2x - x^2| + 3x - 3;$$

$$в) y = \frac{(2-x)(x^2 - x - 2)}{|x + 1|}; \quad г) y = \left| \lg |x - 1| \right|;$$

$$д) y = \left| \sqrt{|x - 1|} - 2 \right|; \quad е) y = |3^{|x - 1|} - 3|;$$

$$ж) y = \frac{3x + 1}{(3x + 1)^2 + 1}; \quad з) y = x^3 - 3x;$$

$$и) y = \frac{x}{(x + 1)^2}; \quad к) y = \frac{\ln x}{x}.$$

9.2. Какая из указанных функций четная, какая нечетная, а какая не является ни четной, ни нечетной:

$$y_1 = \frac{2^{-x} + 6^x}{15x + 5^{-x}};$$

$$y_2 = 1 + \log_3 |x - \sqrt{x^2 - 1}|;$$

$$y_3 = 1 + \frac{2}{2x - 1}?$$

9.3. а) При каком значении a графики функций $y = 4x$ и $y = \log_a(-x)$ пересекаются в точке с абсциссой $-1/2$? Постройте графики функций.

б) Найдите наименьшее положительное значение m , при котором функции $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = 2 \sin mx$ пересекаются в точке с абсциссой $\pi/6$. Постройте графики функций и отметьте точку их пересечения.

9.4. Известно, что график функции $y = f(x) + 2g(x)$ представляет собой прямую AB , проходящую через точки $A(-1; 3)$ и $B(1; 2)$, а график функции $y = 3f(x) - g(x)$ является прямой, симметричной прямой AB относительно оси ординат. Найдите функции $f(x)$ и $g(x)$ и построьте их графики.

9.5. Решите неравенство:

а) $\varphi(x) > f'(x)$,

если $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$, $\varphi(x) = 5x + \frac{1}{x}$;

б) $f'(x) + g'(x) < 0$,

если $f(x) = x^3 - 24x + x^2$, $g(x) = 2x^2 - 9$.

9.6. Вычислите $f'\left[\frac{\pi}{2}\right]$, если

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin x \operatorname{tg} 2x + 2,5 \cos x.$$

9.7. Решите неравенство $f'(x) \leq \varphi'(x)$,

где $f(x) = e^x(x^2 - 3x + 1)$, $\varphi(x) = e^x \cdot 2x$.

9.8. При каком значении x касательная к линии $y = x^2 - 2x + 5$ параллельна прямой $y = 2x$?

9.9. а) Найдите критические точки функции

$$f(x) = \frac{7+x}{2} + \frac{1}{3} \sin 3x$$

на промежутке $[-\pi; 0]$.

б) Найдите критические точки функции

$$y = \sin 3x + \frac{4}{3} \cos 3x - x + 2.$$

9.10. Решите неравенство $\frac{y' + 2}{y' - 1} < 2$, если $y = e^{-3x} + 2x + 16$.

9.11. При каких значениях x производная функции $y = 3(\sin x + \sqrt{3} \cos x) - \sin 3x$ равна 0?

9.12. Найдите промежутки, на которых функция $f(x) = 4x - 6 \cdot 2^x + x \ln 16 - 1$ монотонно возрастает.

9.13. Исследуйте функцию $f(x) = (x + 1)e^{-5x}$ на экстремум, найдите ее промежутки монотонности.

9.14. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2, 1]$.

9.15. Найдите критические точки функции $y = x^5 - 20x^2$ и исследуйте их на максимум и минимум.

9.16. Исследуйте функцию $y = f(x)$ на возрастание (убывание) и экстремумы, если

а) $f(x) = x^4(x - 12)^2$; б) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

9.17. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 6x - x^3$ на отрезке $[-2, 3]$.

9.18. Найдите значение функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 15$ в точке минимума.

9.19. Исследуйте на экстремум функции:

а) $y = \sqrt{2x^2 - x + 3}$; б) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$; в) $f(x) = (2x - 1)e^{3x}$.

9.20. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции:

а) $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$
на отрезке $[-1, 5]$; б) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

на отрезке $[-4, 3]$;

в) найдите точки максимума функции

$$y = -x^3 + 3x|x - 3|,$$

заданной на промежутке $[0, 4]$, и ее наименьшее значение на этом промежутке;

г) найдите наименьшее значение функции

$$y = 2x \ln x - x \ln 49$$

на отрезке $[1, 7]$;

д) найдите максимум функции

$$y = 3 \sin x - \sin 3x$$

на отрезке $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

9.21. Докажите, что для функции

$$f(x) = \frac{(1 + \cos 2x) \sin x}{2}$$

справедливо неравенство

$$\min_{x \in [-\pi; \pi]} f(x) > -\frac{7}{18}.$$

9.22. Найдите наименьшее значение функции

$$а) y(x) = \frac{3}{4} |x| - x^3$$

на отрезке $[-0,7; +0,7]$;

$$б) y = |x^2 - x + \frac{4}{25}| - x^3$$

на промежутке $[-1; 1]$.

9.23. Найдите точки экстремума и интервалы монотонности функции

$$y = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2.$$

9.24. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x) = \frac{1}{\cos 2x - \cos 4x + 3}.$$

9.25. Найдите интервалы монотонности и точки экстремума функции, заданной равенством

$$f(x) = x^2 + 2x - 4 - 2\ln(1 + x).$$

9.26. Для каждого отрицательного числа a найдите наименьшее значение функции $y = \frac{1}{3}(x - a)^3 - \frac{1}{2}(x - a)^2$ на промежутке $0 \leq x \leq 1$.

9.27. Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 2x - x^2$ в точке $x_0 = 2$.

9.28. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой

$$y = x^2 - 4x + 3$$

в точке $M(0; 3)$.

9.29. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = \operatorname{tg} x$ в точке с абсциссой

$$x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

9.30. Прямая касается параболы $y = -x^2 + 2x + 2$ в точке A и пересекает ось Ox в точке B , а ось Oy в точке C . Известно, что точка A лежит в 1-й четверти координатной плоскости и $2AB = AC$. Найдите уравнение касательной.

9.31. Докажите неравенства

а) $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ при $x > -1$;

б) $e^x \geq 1 + x$ при $x \geq 0$;

в) $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$ при $x \geq 0$;

г) $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ при $x \geq 0$;

д) $\operatorname{tg} x \geq x + \frac{x^3}{3}$ при $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

9.32. Сколько точек пересечения имеют графики функций

а) $y = \sqrt{x+4}$ и $y = 2^x$; б) $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ и $y = 2^x$?

9.33. Сколько корней имеют уравнения

а) $x^3 - 3x + 1 = 0$; б) $x^4 - 4x + 1 = 0$;

в) $e^x = x^2$; г) $\ln(1+x) = x$?

9.34. Используя свойства производной, докажите, что для всех $x \in [-2; 2]$ справедливо неравенство

$$x^3 - 3x^2 + 3x \leq 2.$$

9.35. Найдите множество значений функции

$$f(x) = 10^x + 3 \cdot 10^{-x}.$$

9.36. При каких a уравнение $x^3 + \frac{48}{x} = a$ имеет хотя бы одно решение?

9.37. При каких a уравнение $2^x + 2^{3-2x} = a$ имеет хотя бы одно решение?

9.38. Пусть x_1 и x_2 соответственно точка минимума и точка максимума функции $y = -2x^3 + 3(1-2a)x^2 + 12ax - 1$. Найдите все значения a , при которых $x_1^2 = x_2$.

9.39. Пусть x_1 и x_2 — точки экстремумов функции

$$f(x) = 2x^3 + 3(a-2)x^2 - 6(a+1)x + 2$$

При каких a выражение $x_1^2 + x_2^2$ имеет наименьшее значение?

9.40. Пусть $f(x) = (x^2 - 6)(3 - 2x)$. Определите:

- интервалы знакопостоянства функции и ее знаки,
- промежутки монотонности и экстремумы функции.
- Постройте эскиз графика функции $y = f(x)$ и выясните, сколько действительных корней имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от a ?

9.41. На координатной плоскости Oxy вершина A прямоугольного треугольника ABC ($\angle ABC = 90^\circ$) имеет координаты $(-2; 0)$, вершина B лежит на отрезке $[2; 3]$ оси Ox , а вершина C — на параболе $y = x^2 - 4x + 1$. Какие координаты должна иметь вершина C , чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

9.42. Прямоугольник $ABCD$ расположен на координатной плоскости так, что сторона AB лежит на оси ординат, вершины C и D лежат соответственно на параболе $y = -x^2 + 2x - 2$ и на прямой $y = 3 - 3x$, причем абсцисса вершины D принадлежит отрезку $[0, 12; 1, 2]$. Какое значение должна иметь абсцисса вершины D , чтобы площадь прямоугольника $ABCD$ была наименьшей?

9.43. В какой точке надо провести касательную к графику функции

$$y = -\frac{2}{3} \sqrt{18 - x^2}, \quad 0 < x < 3\sqrt{2},$$

чтобы она образовывала с координатными осями треугольник наименьшей площади?

9.44. Найдите размеры открытого бассейна с квадратным дном и объемом 256 м^3 такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

9.45. В прямоугольном параллелепипеде площадь основания равна 2 дм^2 , а боковая поверхность 18 дм^2 . При каких размерах ребер сумма длин всех ребер параллелепипеда будет наименьшей?

9.46. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен $\frac{1}{6\sqrt{2}}$. Пусть x — длина стороны основания и

$x \in \left[-\frac{1}{2}; 2 \right]$. Найдите наименьшее и наибольшее значения квадрата длины апофемы данной пирамиды.

9.47. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Какое наименьшее значение может принимать

площадь боковой поверхности пирамиды?

9.48. Парабола проходит через точки A, B, C, D , обозначенные в порядке следования. Точки A, C, D имеют координаты $A(0; 0); C(1; 1), D(2; 0)$. Найдите координаты точки B , при которых площадь четырехугольника $ABCD$ наибольшая.

9.49. Среди всех равнобедренных трапеций с площадью S и острым углом α найдите ту, периметр которой наименьший. Найдите этот периметр.

9.50. Объем правильной треугольной призмы равен V . Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

9.51. Найдите наибольший объем цилиндра, который можно вписать в конус с радиусом R и высотой h .

9.52. Из всех конусов, описанных около шара радиусом R , найдите тот, который имеет наименьший объем.

ФИЗИКА

Глава 1

Механика

Кинематика

1.1. Может ли человек, находясь на движущемся эскалаторе, быть в покое в системе отсчета, связанной с землей?

1.2. Поезд идет со скоростью 108 км/ч. Пассажир этого поезда, сидящий у окна, видит в течение 18 с встречный поезд, длина которого 900 м. Какова скорость встречного поезда?

1.3. Эскалатор метро поднимает стоящего на нем пассажира в течение 1 мин. По неподвижному эскалатору пассажир поднимается за 3 мин. Сколько времени будет подниматься пассажир по движущемуся эскалатору?

1.4. Пловец переплывает реку по прямой, перпендикулярной берегу. Определите скорость течения, если ско-

рость пловца относительно воды в $\sqrt{2}$ раз больше скорости течения. Скорость пловца относительно берега равна 0,5 м/с.

1.5. С какой скоростью и в каком направлении должен лететь самолет, чтобы за 2 ч пролететь точно на север 300 км, если во время полета дует северо-западный ветер под углом 30° к меридиану со скоростью 27 км/ч?

1.6. Тело движется из состояния покоя равноускоренно. Во сколько раз путь, пройденный этим телом за восьмую секунду, будет больше пути, пройденного за третью секунду?

1.7. Пользуясь графиком зависимости проекции скорости точки от времени (рис. 1), постройте график зависимости ее координаты от времени. В начальный момент координата точки равна нулю.

1.8. Два тела движутся вдоль оси X . На основании графиков зависимости скорости тел от времени (рис. 2) запишите формулу скорости для каждого тела. Начертите графики зависимости координат тел от времени. Начальные координаты у обоих тел равны нулю.

1.9. На рисунке 3 дан график зависимости ускорения

от времени при прямолинейном движении материальной точки. Постройте график зависимости скорости точки от времени. Определите путь, пройденный точкой за все время движения. Начальная скорость точки равна нулю.

1.10. Тело начинает двигаться вдоль оси X из состояния покоя. Ускорение тела задано графиком на рисунке 4. Найдите максимальное значение скорости тела.

1.11. Конькобежец проходит путь 450 м с постоянной скоростью v , а затем тормозит до остановки с ускорением, модуль которого равен $0,5 \text{ м/с}^2$. При некотором значении v общее время движения конькобежца оказывается минимальным. Чему оно равно?

1.12. Первый вагон тронувшегося с места поезда прошел мимо неподвижного наблюдателя, стоявшего у начала этого вагона, за время t_1 , последний — за t_2 . Считая движение поезда равноускоренным, поезд длинным, а вагоны одинаковыми, найдите время движения мимо наблюдателя всего поезда.

1.13. Тело начинает двигаться вдоль прямой без начальной скорости с постоянным ускорением. Через 30 мин ускорение тела меняется по направлению на противоположное, оставаясь таким же по величине. Через какое время от начала движения тело вернется в исходную точку?

1.14. В момент начала свободного падения первого тела второе тело начинает скользить без трения с наклонной плоскости (рис. 5). Сравните времена движения этих тел.

1.15. Тело, свободно падая с некоторой высоты, последнее 196 м пролетело за 4 с. Сколько времени падало тело? Чему равна начальная высота?*

1.16. Тело брошено вертикально вверх с высоты 20 м с начальной скоростью 3 м/с. На какой высоте окажется тело через 2 с после начала движения?

1.17. Тело бросили вертикально вверх со скоростью 30 м/с. Некоторую точку A тело прошло дважды с разницей во времени 2 с. Определите высоту, на которой находится точка A .

1.18. Из одной и той же точки вертикально вверх с интервалом 2 с выброшены два одинаковых шарика со скоростью 30 м/с каждый. Через некоторое время шарики упруго сталкиваются друг с другом. Сколько времени каждый шарик будет находиться в полете?

1.19. Мальчик съехал на санках с горы длиной 40 м за 10 с, а затем проехал по горизонтальному участку еще 20 м до остановки. Найдите скорость в конце горы, уско-

* Если нет других указаний в задаче, сопротивлением воздуха можно пренебречь, а ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2 .

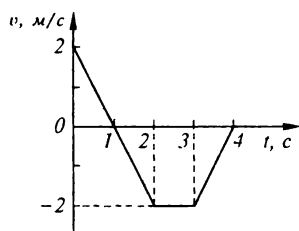


Рис. 1

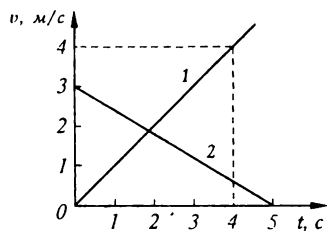


Рис. 2

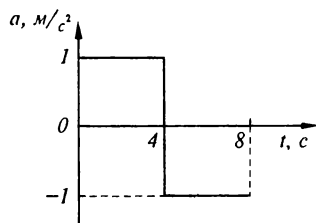


Рис. 3

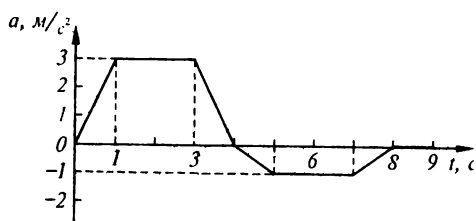


Рис. 4

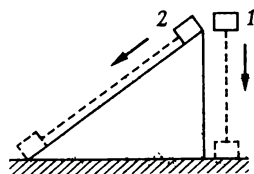


Рис. 5

рение на каждом участке, общее время движения и среднюю скорость на всем пути.

1.20. На каком расстоянии от цели необходимо сбросить выпел с почтой с самолета, летящего на высоте 123 м со скоростью 360 км/ч?

1.21. С какой минимальной скоростью следует бросить под углом 45° к горизонту камень, чтобы он достиг высоты 2,5 м?

1.22. Снаряд вылетел из орудия со скоростью 200 м/с под углом 60° к горизонту. Через какое минимальное время вектор скорости снаряда будет составлять с горизонтом угол 45° ?

1.23. Под каким наименьшим углом к горизонту следует бросить мяч, чтобы он пролетел сквозь баскетбольное кольцо сверху, не ударившись о него? Радиус мяча r , радиус кольца $R = 2r$, высота его над полом 3 м. Баскетболист бросает мяч с высоты 2 м, находясь на расстоянии 5 м от кольца (по горизонтали). Изменением скорости мяча за время полета через кольцо можно пренебречь.

1.24. Два тела бросают с высоты 20 м со скоростью 15 м/с каждое. С какими скоростями тела упадут на землю, если первое тело брошено вертикально вверх, а второе — горизонтально?

1.25. Два тела одновременно брошены из одной точки. Начальная скорость первого тела равна 10 м/с и направлена вертикально вверх, скорость второго равна 20 м/с и направлена под углом 30° к горизонту. Определите расстояние между телами спустя секунду.

1.26. Маленький шарик падает с высоты 50 см на наклонную плоскость, составляющую угол 45° с горизонтом. Найдите расстояние между точками первого и второго ударов шарика о плоскость. Соударения считайте абсолютно упругими.

1.27. Мяч, брошенный со скоростью 10 м/с под углом 45° к горизонту, ударяется о вертикальную стену, находящуюся на расстоянии 3 м от места бросания. Определите модуль и направление скорости мяча после удара. Удар считайте абсолютно упругим, а углы падения и отражения — равными.

1.28. Материальная точка на плоскости совершает движение, которое можно описать формулами $x = a \cos \omega t$, $y = b \cos (\omega t + \varphi_0)$, где x и y — координаты точки в момент времени t , $a = 4$ м, $b = 8$ м, $\varphi_0 = \pi$, $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$. Определите траекторию движения точки.

1.29. Даны кинематические уравнения движения тела: $x = R \sin \omega t$, $y = R \cos \omega t$. Найдите траекторию движения тела и его ускорение.

1.30. Материальная точка движется так, что ее координаты со временем изменяются по законам $x = a \sin \omega t$, $y = a \cos 2\omega t$. Найдите уравнение траектории точки.

Динамика

1.31. Масса некоторой планеты в 2 раза больше массы Земли, а радиус равен радиусу Земли. Определите модуль ускорения свободного падения на поверхности этой планеты.

1.32. Три грузика массой 0,02 кг каждый связаны двумя нитями и подвешены с помощью третьей нити к потолку. Найдите модуль силы натяжения той нити, которая растянута менее других. Жесткости нитей одинаковы.

1.33. На горизонтальной поверхности покоится тело, к которому приложена сила F (рис. 6). При каких значениях угла α тело будет оставаться в покое независимо от величины силы? Коэффициент трения равен 0,15.

1.34. Найдите зависимость величины силы трения $F_{\text{тр}}$ от угла α (рис. 7). Коэффициент трения равен μ , масса тела m .

1.35. Автомобиль массой $2 \cdot 10^3$ кг, двигаясь из состояния покоя по горизонтальному пути, через 10 с от начала движения достигает скорости 20 м/с. Коэффициент трения равен 0,1. Определите силу тяги двигателя автомобиля.

1.36. На нити подвешен груз, масса которого 1 кг. Нить с грузом опускают с ускорением 5 м/с². Определите силу натяжения нити.

1.37. Груз массой 50 кг перемещается по горизонтальной плоскости под действием силы, равной 300 Н и направленной под углом 30° к горизонту. Коэффициент трения груза о плоскость равен 0,1. Определите ускорение груза.

1.38. Деревянный брусок находится на наклонной плоскости. С какой наименьшей силой нужно прижать брусок к плоскости, чтобы он остался на ней в покое? Масса бруска 0,2 кг, длина наклонной плоскости 1 м, а высота 0,5 м, коэффициент трения бруска о плоскость 0,4.

1.39. Колена U-образного сосуда удалены друг от друга на 15 см. Найдите максимальную разность уровней воды в коленах, если сосуд движется с горизонтальным ускорением 6 м/с².

1.40. Стальной магнит массой 50 г прилип к вертикальной стальной плите. Для равномерного скольжения магнита вниз прикладывают силу 1,5 Н. С какой силой магнит прижимается к плите? Какую силу надо приложить, чтобы перемещать магнит по плите вертикально вверх, если коэффициент трения равен 0,2?

1.41. Шар массой 4 кг, подвешенный на нерастяжимой и невесомой нити длиной 1 м, совершает колебания в вертикальной плоскости. Найдите силу натяжения нити в тот момент, когда она образует с вертикалью угол 60°, а скорость шара равна 1,5 м/с.

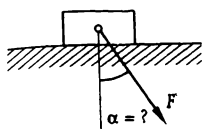


Рис. 6

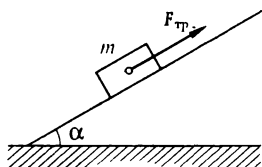


Рис. 7.

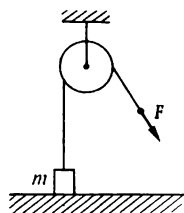


Рис. 8

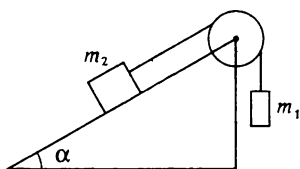


Рис. 9

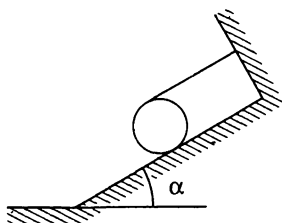


Рис. 10

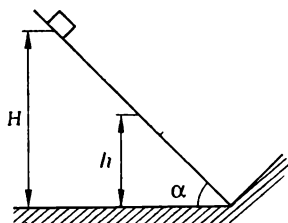


Рис. 11

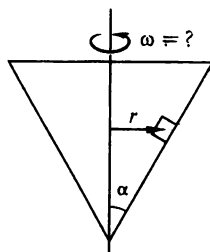


Рис. 12

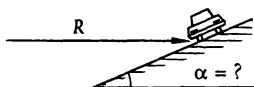


Рис. 13

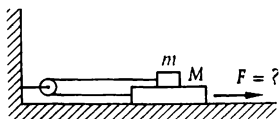


Рис. 14

1.42. К телу, лежащему на горизонтальной плоскости, в

течение времени t прикладывают силу \vec{F} , направленную вдоль плоскости, после чего тело движется до остановки в течение времени t . Найдите силу трения.

1.43. Через неподвижный блок перекинута легкая веревка, к концу которой прикреплен груз массой 9 кг (рис. 8). Для поднятия груза с земли на высоту 4 м за время 6 с надо тянуть веревку с постоянной силой F . На какую величину потребуется увеличить силу, чтобы поднять груз с земли за то же время на высоту 6 м? Массой блока и трением в его оси можно пренебречь.

1.44. Два груза, массы которых 1 кг и 2 кг, связаны перекинутой через неподвижный блок нитью. В начальный момент оба груза неподвижны и второй груз находится выше первого на 1 м. Через какое время после начала движения грузы будут находиться на одинаковой высоте?

1.45. Два тела связаны легкой нитью, перекинутой через невесомый блок, установленный на наклонной плоскости (рис. 9). Найдите ускорение, с которым будут двигаться эти тела. Трением можно пренебречь. Массы тел равны 10 г и 15 г. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол 30° .

1.46. На цилиндр намотана нить, конец которой закреплен на стойке, укрепленной в верхней точке наклонной плоскости (рис. 10). Коэффициент трения цилиндра о плоскость равен μ . При каком максимальном значении угла α цилиндр не будет скатываться с наклонной плоскости?

1.47. Шарик ударяется о плоскость под углом 45° к ее нормали. Коэффициент трения о плоскость равен 0,6. Под каким углом шарик отразится от плоскости, если нормальная составляющая скорости при ударе сохраняется?

1.48. Небольшое тело соскальзывает без начальной скорости с наклонной плоскости высотой H и ударяется о стенку, перпендикулярную наклонной плоскости (рис. 11). После этого тело поднимается по плоскости на высоту $h = H/2$. Угол наклона плоскости к горизонту равен 45° . Считая удар абсолютно упругим, определите коэффициент трения между телом и плоскостью. После удара тело движется поступательно.

1.49. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг вертикальной оси, делая 15 оборотов в минуту. Наибольшее расстояние от оси вращения, на котором тело удерживается на диске, равно 10 см. Чему равен коэффициент трения тела о диск?

1.50. Тонкий обруч радиусом R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и положили на горизонтальный стол. Через какое время обруч остановится, если

коэффициент трения между столом и обручем равен μ ? Сколько оборотов сделает обруч до остановки?

1.51. Шайба лежит в конической чаше на расстоянии 20 см от вертикальной оси конуса (рис. 12). Угол между образующей и осью конуса равен 60° , коэффициент трения между шайбой и чашей 0,8. С какой угловой скоростью следует вращать чашу вокруг ее оси, чтобы шайба вылетела из чаши?

1.52. Автомобили на автодроме испытываются на скорости 120 км/ч. Под каким углом (α) к горизонту (рис 13) должно быть наклонено полотно дороги на повороте с радиусом закругления 110 м, чтобы движение автомобиля было наиболее безопасным даже в гололедицу?

1.53. По выпуклому мосту, имеющему радиус кривизны 40 м, движется автобус массой $2 \cdot 10^3$ кг со скоростью 36 км/ч. Определите ускорение автобуса и силу его давления на мост в верхней точке моста.

1.54. Автомобиль движется по мосту, имеющему форму дуги радиусом 40 м, обращенной выпуклостью вверх. Коэффициент трения скольжения колес о мост равен 0,57. Какое максимальное ускорение в горизонтальном направлении сможет развить автомобиль в высшей точке моста, если он в этот момент будет иметь скорость 50,4 км/ч? Какой угол с горизонтом будет составлять вектор полного ускорения в этой точке?

1.55. Найдите первую космическую скорость для планеты, масса которой в 3 раза больше массы Земли, а радиус больше земного в 2 раза. Первую космическую скорость для Земли считайте равной 8 км/с.

1.56. Определите среднюю плотность некоторой планеты, если продолжительность суток на ней составляет 6 ч, а пружинные весы на экваторе показывают на 10 % меньший вес, чем на полюсе.

1.57. Спутник движется по орбите так, что все время находится над одной и той же точкой экватора на одной и той же высоте. Каково расстояние такого спутника до центра Земли?

1.58. Два спутника движутся вокруг Земли по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, со скоростями 7,8 км/с и 7,6 км/с. Определите минимальное расстояние между спутниками и промежуток времени, через который они вновь будут находиться на таком же расстоянии.

1.59. Вертикально расположенная пружина соединяет два груза. Масса верхнего груза 2 кг, а нижнего 3 кг. Когда система подвешена за верхний груз, длина пружины равна 10 см. Если же систему поставить на подставку, длина пружины оказывается равной 4 см. Определите длину ненапряженной пружины.

1.60. На горизонтальной плоскости лежат два бруска, соединенные ненапряженной пружиной. Массы брусков m_1

и m_2 . Какую наименьшую постоянную силу, направленную горизонтально, нужно приложить к первому бруску, чтобы сдвинулся второй? Коэффициент трения брусков о плоскость равен μ .

1.61. Доска массой M может двигаться без трения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. С каким ускорением должна бежать по доске собака массой m , чтобы доска не соскальзывала с наклонной плоскости? Каким должен быть коэффициент трения между лапами собаки и доской, чтобы задача имела решение?

1.62. Тележка массой 20 кг может катиться без трения по горизонтальному пути. У заднего края тележки лежит брусок массой 2 кг (края бруска и тележки совпадают). Коэффициент трения между бруском и тележкой 0,25. К бруску приложена горизонтальная сила 20 Н. Через какое время брусок упадет с тележки, если его длина 1 м?

1.63. На гладком горизонтальном столике лежит брусок массой 2 кг, на котором находится другой брусок массой 1 кг (рис. 14). Оба бруска связаны нитью, перекинутой через невесомый блок. Какую силу нужно приложить к нижнему бруску, чтобы он двигался с ускорением $g/2$? Коэффициент трения между брусками равен 0,5.

1.64. На бруске, находящемся на горизонтальной плоскости, установлен подвес с нитью длиной l и грузом массой m (рис. 15). Нить с грузом отклонили на угол $\pi/2$ и отпустили. Определите массу бруска, если он сдвинулся, когда угол между нитью и вертикалью был равен α . Коэффициент трения бруска о плоскость μ .

1.65. По сторонам прямого угла скользит жесткая спица длиной $2l$, посередине которой закреплена бусинка массой m (рис. 16). Скорость точки B постоянна и равна v . С какой силой действует бусинка на спицу в тот момент, когда угол α равен 45° ?

Статика

1.66. К концам рычага подвесили различные грузы и привели его в состояние равновесия. После того как массу каждого из грузов увеличили на 1 кг, точку опоры рычага пришлось переместить на 5 см в сторону большего груза, чтобы восстановить равновесие. Определите значение первоначальных масс грузов, если в первом случае точка опоры отстояла от одного груза на 20 см, а от другого — на 30 см. Весом рычага можно пренебречь.

1.67. Однородное бревно длиной l и массой 100 кг лежит на двух опорах. Расстояние от правого конца бревна до ближайшей опоры $l/3$, от левого $l/4$. С какой силой давит бревно на каждую из опор? Какую минимальную силу надо приложить, чтобы приподнять бревно за правый конец?

1.68. Тяжелый стержень согнут посередине под прямым углом и подвешен свободно за один из концов. Какой угол с вертикалью образует верхняя половина стержня?

1.69. Однородная лестница массой 6 кг и длиной 3 м приставлена к стенке и образует с ней угол 30° . Определите момент силы тяжести, действующей на лестницу, относительно оси, проходящей через нижний ее конец параллельно ступенькам.

1.70. К стене прислонена лестница массой m . Центр тяжести лестницы находится на расстоянии $1/3$ длины от верхнего конца. Какую горизонтальную силу нужно приложить к середине лестницы, чтобы верхний конец ее не оказывал давления на стену? Угол между лестницей и стеной равен α .

1.71. Тонкая однородная палочка шарнирно укреплена за верхний конец, а нижним концом погружена в воду. При этом равновесие достигается, когда палочка расположена наклонно к поверхности воды и в воде находится половина палочки. Какова плотность материала палочки?

1.72. Брус массой 50 кг и длиной 10 м одним концом опирается о горизонтальную плоскость. Другой его конец удерживается веревкой так, что веревка и брус образуют прямой угол, а брус и горизонтальная плоскость — угол 60° . Найдите силу натяжения веревки.

1.73. Лестница прислонена к гладкой вертикальной стене под углом 30° . Сможет ли человек подняться по лестнице до ее середины, прежде чем лестница начнет скользить, если коэффициент трения между лестницей и горизонтальным полом равен 0,3? Массой лестницы и трением о стену можно пренебречь.

1.74. Тонкий однородный стержень укреплен на шарнире в точке A и удерживается в равновесии горизонтальной нитью (рис. 17). Масса стержня 1 кг, угол его наклона к горизонту 45° . Найдите величину силы реакции шарнира.

1.75. На высоте 40 см от пола к горизонтальной оси прикреплен стержень длиной 30 см и массой 0,5 кг (рис. 18). Стержень отклонен от вертикали на угол 30° и касается шара радиусом 10 см, лежащего на полу. Определите силу трения между шаром и полом и между шаром и стержнем, если вся система находится в равновесии.

1.76. На конце стержня длиной 30 см укреплен шар радиусом 6 см. Где находится центр тяжести этой системы, если масса стержня вдвое меньше массы шара?

1.77. Определите положение центра тяжести однородной квадратной пластинки со стороной 12 см, в которой вырезано круглое отверстие радиусом 3 см, касающееся двух смежных сторон.

1.78. Найдите центр тяжести тонкой однородной проволоки, согнутой в виде полуокружности радиусом r .

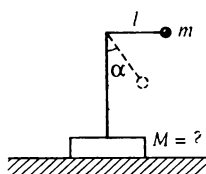


Рис. 15

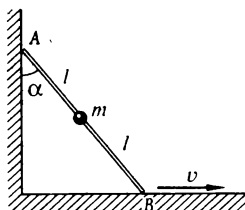


Рис. 16

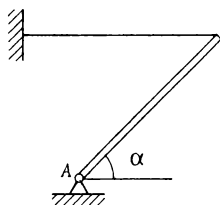


Рис. 17

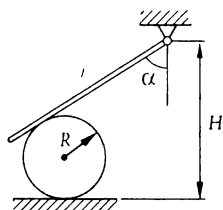


Рис. 18

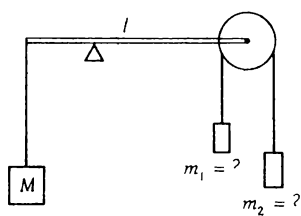


Рис. 19

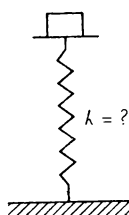


Рис. 20

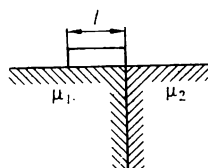


Рис. 21

1.79. К коромыслу равноплечных весов подвешены два сплошных однородных шарика, сделанных из разных материалов, но имеющих одинаковые массы. Если теперь один из шариков поместить в жидкость плотностью 10^3 кг/м^3 , а другой — в жидкость плотностью $0,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, то равновесие сохранится. Считая, что плотности шариков больше плотностей жидкостей, найдите отношение плотностей шариков.

1.80. Система состоит из невесомого стержня длиной 35 см, положенного на неподвижную призму, а также невесомого блока с двумя грузами m_1 и m_2 и груза массой $M = 2 \text{ кг}$, прикрепленных к концам стержня (рис. 19). При движении грузов m_1 и m_2 равновесие стержня имеет место, если точка опоры стержня сдвинута на 5 см левее середины стержня. Определите массы грузов m_1 и m_2 , если $m_1 + m_2 = M$.

Законы сохранения в механике

1.81. Шарик массой m , движущийся со скоростью v , упруго ударяется о гладкую стенку под углом α к ней и отскакивает без потери скорости. Определите изменение импульса шарика.

1.82. Мальчик, масса которого 50 кг, бежит со скоростью 2 м/с, догоняет тележку, движущуюся в том же направлении со скоростью 0,5 м/с, и вскакивает на нее. С какой скоростью стала двигаться тележка с мальчиком? Масса тележки 100 кг.

1.83. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска массой m . По ней начинает со скоростью v_0 скользить шайба массой $m/2$. Из-за трения между шайбой и доской через некоторое время скольжение шайбы по доске прекращается. Какова при этом скорость шайбы?

1.84. Шарик массой 10 г падает с высоты 2 м и упруго отражается от установленного на неподвижной тележке щита, плоскость которого наклонена к горизонту под углом 45° . Найдите скорость тележки после отражения шарика. Трением качения тележки можно пренебречь. Масса тележки со щитом 90 г.

1.85. Конькобежец массой 60 кг бросает в горизонтальном направлении камень массой 2 кг со скоростью 15 м/с. На какое расстояние откатится при этом конькобежец, если известно, что коэффициент трения полозьев о лед равен 0,02?

1.86. Граната массой 1 кг разорвалась на высоте 6 м над землей на два осколка. Непосредственно перед разрывом скорость гранаты была направлена горизонтально и равна 10 м/с. Один из осколков массой 0,4 кг полетел вертикально вниз и упал на землю под местом разрыва со скоростью 40 м/с. Чему равен модуль скорости второго осколка сразу после разрыва?

1.87. Веревка длиной 20 м и массой 1 кг переброшена через гвоздь, вбитый в вертикальную стену. В начальный момент веревка висит симметрично и покоится, а затем в результате незначительного толчка начинает скользить по гвоздю без трения. Каким будет импульс веревки, когда она соскользнет с гвоздя?

1.88. Какую работу нужно совершить, чтобы за время t подняться по движущемуся вниз эскалатору метро? Высота подъема h , скорость эскалатора постоянна и равна v , угол наклона эскалатора к горизонту α .

1.89. Чему равна работа по подъему цепи (взятой за один конец), лежащей на плоскости, на высоту, при которой нижний конец отстоит от плоскости на расстояние, равное длине цепи? Длина цепи 2 м, масса 5 кг.

1.90. Бетонная однородная свая массой m лежит на дне водоема глубиной h , большей, чем длина сваи l . Привязав трос к одному концу сваи, ее медленно вытаскивают из воды так, что центр тяжести сваи поднимается на высоту H от поверхности воды ($H > l$). Какая работа совершается при этом? Плотность бетона в n раз больше плотности воды. Силами сопротивления можно пренебречь.

1.91. Деформация вертикально расположенной легкой пружины, удерживающей гирию, составляет 4 см (рис. 20). Чтобы увеличить деформацию пружины на 50 %, медленно надавливая на груз в вертикальном направлении, надо совершить работу 0,3 Дж. Найдите жесткость пружины.

1.92. Плоская шайба массой 0,2 кг начинает скользить с начальной скоростью 12 м/с вверх по наклонной плоскости, составляющей угол 30° с горизонтом. Коэффициент трения между шайбой и плоскостью равен 0,3. Какую работу совершат над шайбой силы трения в течение 3,5 с после начала движения?

1.93. Брусек массой m и длиной l лежит на стыке двух столов (рис. 21). Какую работу надо совершить, чтобы брусок перетащить волоком с первого стола на второй, если коэффициенты трения между ним и столами μ_1 и μ_2 соответственно?

1.94. Камень массой 0,5 кг бросили с высоты 30 м с начальной скоростью 25 м/с. Перед ударом о землю скорость камня составляла 30 м/с. Определите работу сил сопротивления воздуха при движении камня.

1.95. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить скорость тела от 2 м/с до 6 м/с на пути 10 м? На всем пути действует постоянная сила трения, равна 2 Н. Масса тела 1 кг.

1.96. Санки массой m соскальзывают с горы высотой h и, пройдя некоторое расстояние, останавливаются. Определите работу, которую нужно совершить, чтобы втащить санки обратно на гору.

1.97. Ракета с работающим двигателем «зависла» над

поверхностью Земли. Какова мощность, развиваемая двигателем, если масса ракеты m , а скорость истечения газов из двигателя v ? Изменением массы ракеты за счет истечения газов можно пренебречь.

1.98. Тело массой 2 кг брошено с земли со скоростью 6 м/с под углом 30° к горизонту. На сколько увеличится потенциальная энергия тела, когда оно достигнет высшей точки подъема?

1.99. Камень массой 0,04 кг бросают вертикально вверх со скоростью 30 м/с. Определите полную энергию камня в конце четвертой секунды. Потенциальная энергия камня в начальный момент равна нулю.

1.100. По оси X в ее положительном направлении движется некоторое тело с постоянной скоростью 5 м/с. Потенциальная энергия тела меняется вдоль оси по закону $W = (-10^{-2}x)$ Дж. Найдите мощность, развиваемую силами сопротивления, препятствующими движению.

1.101. Брусok массой m равномерно вытягивают за привязанную к нему веревку на высоту h по доске, угол наклона которой к горизонту равен α . Веревка параллельна доске. Коэффициент трения бруска о доску равен μ . Найдите энергию, которая идет на нагревание доски и бруска.

1.102. Невесомый стержень вращается вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню. По разные стороны от оси на расстояниях 1 м и 2 м от нее на стержне закреплены грузы, массы которых 1 кг и 2 кг соответственно. Стержень, первоначально расположенный горизонтально, отпускают без толчка. Найдите скорости грузов в тот момент, когда стержень проходит вертикальное положение. Трения нет.

1.103. В установке (рис. 22) масса каждого груза (A и B) 2 кг, угол наклона плоскости к горизонту 30° , массы блока и нити пренебрежимо малы, трения нет. Найдите мощность, которую разовьет сила натяжения, действующая на груз A , через 2 с после начала движения.

1.104. Небольшое тело соскальзывает по наклонной поверхности, переходящей в «мертвую петлю», с высоты $2R$, где R — радиус петли (рис. 23). На какой высоте тело оторвется от поверхности петли? С какой высоты должно скатываться тело для того, чтобы отрыва не произошло?

1.105. На нити длиной $2h$, закрепленной в точке O (рис. 24), подвешен шарик массой m . На расстоянии h от точки O вбит гвоздь. Нить отклонили от положения равновесия на угол 90° и отпустили. На какую максимальную высоту поднимется шарик после прохождения положения равновесия?

1.106. Небольшое тело подвешено на нити длиной l . Какую скорость надо сообщить этому телу, чтобы оно смогло только-только достигнуть верхней точки траектории?

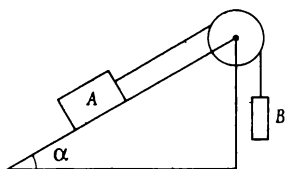


Рис. 22

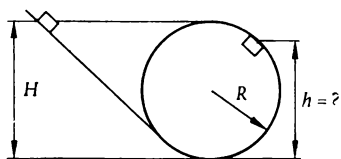


Рис. 23

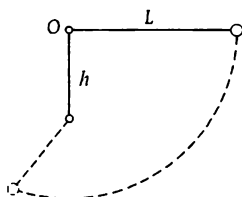


Рис. 24

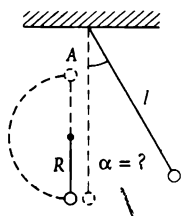


Рис. 25

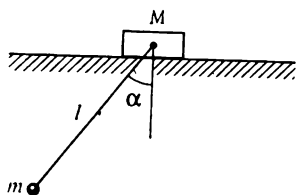


Рис. 26

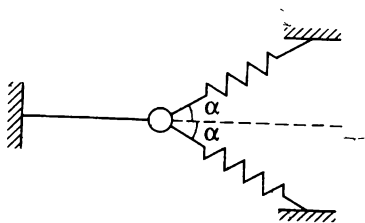


Рис. 27

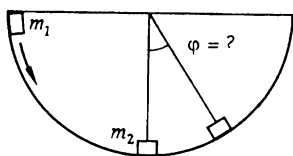


Рис. 28

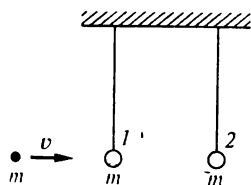


Рис. 29

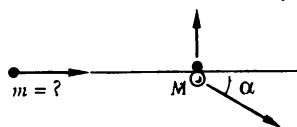


Рис. 30

1.107. Абсолютно упругий шарик, подвешенный на нити длиной l , отклоняют на угол α и отпускают (рис. 25). В нижней точке он сталкивается с таким же шариком, висящим на нити длиной R . При каком минимальном значении угла α второй шарик после удара будет двигаться по окружности радиусом R вплоть до точки A ?

1.108. На концах и в середине невесомого стержня длиной l расположены одинаковые шарики. Стержень ставят вертикально и отпускают. Считая, что трение между плоскостью и нижним шариком отсутствует, найдите скорость верхнего шарика в момент удара о горизонтальную поверхность.

1.109. Маленький шарик массой 10 г подвешен на нити длиной 1,1 м к бруску массой 100 г (рис. 26). Брусок находится на горизонтальной поверхности и может перемещаться в плоскости рисунка. Придерживая брусок, шарик отклоняют так, что нить образует с вертикалью угол 60° , и отпускают оба тела. Какова скорость бруска в тот момент, когда нить проходит через вертикальное положение? Трение можно не учитывать.

1.110. Шарик массой 50 г прикреплен к двум одинаковым невесомым пружинкам и нити (рис. 27), угол α равен 60° , жесткость каждой пружины 10 Н/м. В некоторый момент нить обрывается, и шарик начинает движение с ускорением 2 м/с^2 . Какую максимальную скорость приобретет шарик при своем движении, если расстояние между точками закрепления пружин не превышает удвоенной длины недеформированной пружины?

1.111. Пуля пробивает закрепленную доску при минимальной скорости v_0 . С какой скоростью должна лететь пуля для того, чтобы пробить незакрепленную доску? Масса доски M , масса пули m , пуля попадает в центр доски.

1.112. Два пластилиновых шара, массы которых относятся как 1:3, подвешены на одинаковых нитях и касаются друг друга. Шары симметрично развели в противоположные стороны и одновременно отпустили. При ударе шары слиплись. Какая часть кинетической энергии шаров при этом превратилась в тепло?

1.113. Пуля ударяет со скоростью 400 м/с в центр шара, подвешенного на нити длиной 4 м, и упруго отскакивает от него. Определите угол, на который отклоняется нить, если масса пули 20 г и масса шара 5 кг.

1.114. Два тела, которые первоначально покоились на гладкой горизонтальной плоскости, расталкиваются зажатой между ними пружиной и начинают двигаться поступательно со скоростями 3 м/с и 1 м/с. Какая энергия была запасена в пружине, если известно, что суммарная масса обоих тел 8 кг, пружина невесома, трение отсутствует?

1.115. Два тела, массы которых одинаковы, движутся навстречу друг другу, при этом скорость одного тела в 2 раза больше скорости второго. Какая часть механиче-

ской энергии этих тел перейдет во внутреннюю при центральном абсолютно неупругом соударении?

1.116. Пуля массой m попадет в центр шара массой M , лежащего на краю стола, и застревает в нем. Определите скорость шара в момент удара о пол, если пуля летела в горизонтальном направлении со скоростью v_0 , а высота стола H .

1.117. С края гладкой полусферы соскальзывает небольшое тело массой m_1 и ударяет неупруго в тело массой m_2 , лежащее на дне полусферы (рис. 28). Найдите угловую амплитуду качаний тел после удара. Радиус сферы R .

1.118. Пуля пробивает один из подвешенных грузиков и застревает в другом (рис. 29). Начальная скорость пули v , масса пули m равна массе каждого грузика. Найдите количество теплоты, выделившееся в первом грузике, если во втором выделилось количество теплоты Q .

1.119. Происходит соударение двух абсолютно упругих шаров, имеющих массы m_1 и m_2 . Их начальные скорости v_1 и v_2 соответственно. Найдите скорости шаров после удара. Удар считайте центральным (скорости шаров направлены вдоль линии, соединяющей их центры).

1.120. Из двух соударяющихся абсолютно упругих шаров шар большей массы до удара покоился. В результате прямого удара меньший шар потерял $3/4$ своей кинетической энергии. Чему равно отношение масс шаров?

1.121. Частица с кинетической энергией E_0 упруго сталкивается с такой же неподвижной частицей и отклоняется от первоначального направления на угол, равный 60° . Определите кинетические энергии частиц после соударения.

1.122. Тело массой m , движущееся со скоростью v , налетает на покоящееся второе тело и после упругого столкновения отскакивает от него под углом 90° к первоначальному направлению движения со скоростью $2/3 v$. Определите массу второго тела.

1.123. Частица налетает на неподвижную мишень и отражается назад с уменьшенной в n раз кинетической энергией. Определите отношение массы частицы к массе мишени, если соударение упругое.

1.124. После упругого столкновения с покоящейся частицей массой M налетающая частица полетела под прямым углом к первоначальному направлению движения, а частица массы M — под углом α к этому направлению (рис. 30). Найдите массу налетающей частицы.

1.125. Три одинаковых упругих шарика висят на параллельных нитях одинаковой длины, касаясь друг друга. Один из шариков отклоняют перпендикулярно к прямой, соединяющей центры двух других шариков, и отпускают. Найдите скорость шариков после соударения, если в момент удара налетающий шарик имел скорость v_0 .

1.126. Два одинаковых вертикальных сообщающихся сосуда заполнены водой и закрыты легкими поршнями. На какую высоту поднимется правый поршень после установления равновесия, если на левый поставить груз массой 3 кг? Площадь каждого поршня 200 см^2 .

1.127. В открытый цилиндрический сосуд налиты ртуть и вода в равных по массе количествах. Общая высота двух слоев жидкостей 29,2 см. Определите давление на дно сосуда

1.128. Аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, заполнен водой. С какой силой вода давит на стенку аквариума, если ее длина 0,8 м, а высота 0,6 м?

1.129. В сообщающиеся сосуды налили воду, а затем в один из сосудов налили масло. Какой будет разность уровней воды в сосудах, если высота масла 40 см?

1.130. В цилиндрический сосуд, радиус дна которого R , налита вода. На сколько повысится уровень воды, если в сосуд поместить деревянный брусок массой m ?

1.131. В стакан до краев налита вода. Определите массу воды, которая выльется из стакана, если в него опустить на нити тело массой 20 г, плотность которого 800 кг/м^3 .

1.132. В цилиндрический сосуд с водой опустили железную коробочку, из-за чего уровень воды в сосуде поднялся на 2 см. На сколько опустится уровень воды, если коробочку утопить?

1.133. Однородный шарик массой 60 г лежит на дне пустого стакана. В стакан наливают жидкость так, что объем погруженной в жидкость части шарика оказывается в 6 раз меньше его общего объема. Плотность жидкости в 3 раза больше плотности материала шарика. Найдите силу давления шарика на дно стакана.

1.134. В цилиндрическом стакане с водой плавает льдинка, притянутая нитью ко дну (рис. 31). Когда

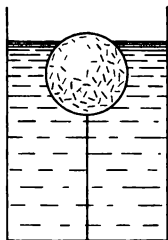


Рис. 31

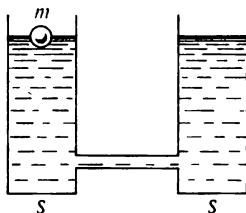


Рис. 32

льдинка растаяла, уровень воды изменился на Δh . Каково было натяжение нити? Площадь дна стакана S .

1.135. В одном из двух одинаковых заполненных водой цилиндрических сообщающихся сосудов плавает шарик (рис. 32). Масса шарика m , сечение каждого сосуда (площадь дна) S . На сколько изменится уровень воды, если вынуть шарик?

Глава 2

Молекулярная физика. Тепловые явления

Газы, пары, жидкости

2.1. Какой высоте ртутного столба соответствует давление $5,44 \cdot 10^4$ Па?

2.2. Сколько молекул содержится в 1 мм^3 газа при температуре 27°C и давлении 10^{-11} мм рт. ст.?

2.3. Определите число атомов натрия в объеме 1 см^3 .

2.4. Какой скоростью обладала молекула паров серебра, если угловое смещение в опыте Штерна составило $5,4^\circ$ при частоте вращения прибора 150 с^{-1} ? Расстояние между внутренним и внешним цилиндрами равно 2 см .

2.5. Средняя квадратичная скорость молекул газа равна 400 м/с . Определите объем, который занимает 1 кг газа при давлении 10^5 Па.

2.6. В закрытом сосуде находится идеальный газ. Как изменится его давление, если средняя скорость его молекул увеличится на 20% ?

2.7. Под каким давлением находится в баллоне кислород, если емкость баллона 5 л , а средняя кинетическая энергия поступательного движения всех молекул кислорода 6 кДж ?

2.8. После того как в комнате протопили печь, температура поднялась с 15°C до 27°C . На сколько процентов изменилось число молекул в этой комнате?

2.9. Найдите среднюю энергию атома аргона, если 2 кмоль этого газа в баллоне объемом 10 л создают давление 10^6 Па.

2.10. Газ нагрели от температуры 27°C до температуры 39°C . На сколько процентов увеличился объем газа, если давление осталось неизменным?

2.11. Дан график зависимости давления от объема для идеального газа (рис. 33). Постройте график этого же процесса в координатах объем — температура, измеренная по шкале Цельсия.

2.12. Объем пузырька воздуха по мере его всплывания со дна озера на поверхность увеличивается в n раз. Како-

ва глубина озера? Изменением температуры с глубиной можно пренебречь

2.13. Открытая с двух концов трубка длиной 0,76 м до половины погружена в ртуть. Сколько ртути останется в трубке, если, плотно закрыв верхнее отверстие, вынуть трубку из ртути?

2.14. В вертикально расположенном цилиндре постоянного сечения под невесомым подвижным поршнем находится воздух. На поршень ставят гирию массой 10 кг. На сколько переместится поршень, если температура воздуха в цилиндре поддерживается постоянной? Атмосферное давление 10^5 Па, площадь сечения поршня 100 см^2 , расстояние от ненагруженного поршня до дна цилиндра 100 см.

2.15. Цилиндрический стакан опущен отверстием вниз в воду и плавает в ней так, что внутренняя поверхность дна находится на одном уровне с поверхностью воды в сосуде. Масса стакана 400 г, площадь его дна 10 см^2 , давление воздуха в стакане перед погружением 760 мм рт. ст. Какую часть стакана будет занимать воздух после погружения?

2.16. Сосуд разделен подвижным поршнем на объемы $V/3$ и $2V/3$, содержащие газ с температурой T (рис. 34). До какой температуры нужно нагреть газ слева от поршня, чтобы отношение объемов сменилось на обратное? Справа температура газа поддерживается прежней.

2.17. Определите плотность идеального газа при температуре 100°C и давлении 10^5 Па. Определите также массу одной молекулы этого газа, если его молярная масса $32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

2.18. До какой температуры следует нагреть изобарически газ, чтобы его плотность уменьшилась в 2 раза по сравнению с плотностью при 0°C ?

2.19. Трубка длиной 1,1 м, герметично закрытая с одного конца, опускается в воду открытым концом и плавает в вертикальном положении, что обеспечивается незначительными внешними боковыми усилиями. Трубку при-

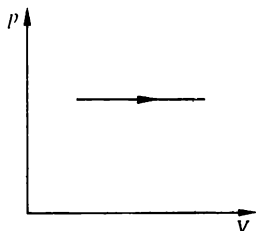


Рис. 33

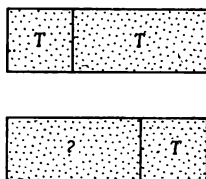


Рис. 34

топили, опустив ее закрытый конец до поверхности воды снаружи, и удерживают в новом вертикальном положении. Найдите высоту слоя воды, находящейся в трубке. Атмосферное давление принять равным давлению, создаваемому слоем воды высотой 10 м.

2.20. Воздух находится в открытом сверху вертикальном цилиндрическом сосуде под поршнем массой 20 кг и сечением 20 см^2 . После того как сосуд стали двигать вверх с ускорением 5 м/с^2 , высота столба воздуха между поршнем и дном сосуда уменьшилась на 20 %. Считая температуру постоянной, найдите по этим данным атмосферное давление. Трением между поршнем и стенками сосуда можно пренебречь.

2.21. Некоторое количество водорода находится в закрытом сосуде при температуре 200 К и давлении 400 Па. Газ нагревают до такой температуры, что молекулы водорода практически полностью распадаются на атомы. При этом давление газа становится равным 40 кПа. Во сколько раз возросла при этом средняя квадратичная скорость частиц газа?

2.22. На плоскости V, T изображен процесс, который произошел с газом при постоянном давлении и постоянном объеме (рис. 35). Как при этом изменилась масса газа?

2.23. На p, T -диаграмме (рис. 36) показан процесс, проводимый с идеальным газом. Объем газа постоянен. Найдите точки, где масса газа максимальна и минимальна.

2.24. Сосуд, содержащий идеальный газ при температуре 27°C , снабжен клапаном, открывающимся при перепаде давлений, равном 400 кПа. Газ нагревают до 127°C , при этом часть газа выходит из сосуда через клапан. Какое давление установится в сосуде после охлаждения газа до начальной температуры? Атмосферное давление 100 кПа.

2.25. Объем газа при нагревании изменяется по закону $V = \alpha \sqrt{T}$, где α — постоянная величина. Начертите график этого процесса в координатах p, V .

2.26. На V, T -диаграмме (рис. 37) показан замкнутый процесс, проведенный с идеальным газом. Изобразите этот процесс в координатах p, V .

2.27. В сосуде находится озон при температуре 527°C . Через некоторое время он полностью превратился в кислород, а температура в сосуде упала до 127°C . На сколько процентов изменилось при этом давление газа?

2.28. Резиновый шар содержит 2 л кислорода при температуре 20°C и атмосферном давлении 100 кПа. Определите массу кислорода в шаре. Какой объем займет кислород, если шар опустить в воду на глубину 10 м и охладить до температуры воды 4°C ? Давление внутри шара считайте равным давлению вне шара.

2.29. В чашечный ртутный барометр попал воздух, в результате чего при нормальных условиях барометр показывает 740 мм рт. ст., а расстояние от уровня ртути в трубке до запаянного конца составляет 10 см. Чему равно истинное значение атмосферного давления, если при температуре 20 °С барометр показывает 730 мм рт. ст.? Тепловым расширением ртути и трубки можно пренебречь.

2.30. Некоторая масса молекулярного водорода занимает объем 1 м³ при температуре 250 К и давлении 2 атм. Какое давление будет иметь та же масса водорода при 5000 К в объеме 10 м³, если при столь высокой температуре молекулы водорода полностью диссоциируют на атомы?

2.31. На рисунке 38 показан цикл, совершаемый над идеальным газом, причем участок 1–2 изображает изохорный процесс, 2–3 — изобарный. Температуры газа в точках 1 и 3 равны соответственно 300 К и 400 К. Найдите температуру газа в точке 2. Масса газа постоянна.

2.32. Идеальный газ медленно переводят из состояния с объемом 32 л и давлением $4,1 \cdot 10^5$ Па в состояние с объемом 9 л и давлением $15,5 \cdot 10^5$ Па так, что давление во время сжатия изменяется в зависимости от объема по линейному закону $p = aV + b$, где a и b — постоянные

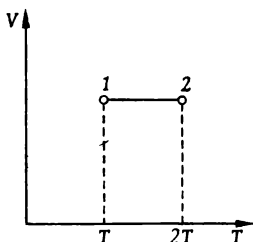


Рис. 35

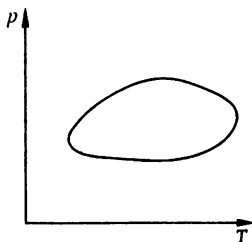


Рис. 36

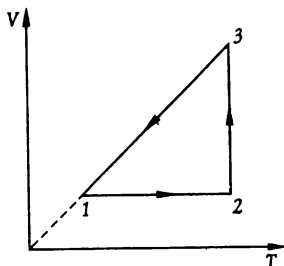


Рис. 37

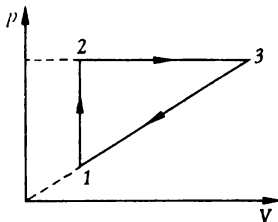


Рис. 38

величины. При каком объеме температура газа в этом процессе будет наибольшей?

2.33. Некоторое тело находится в воздухе при нормальных условиях. При увеличении температуры воздуха на 10°C (но при постоянном давлении) вес тела увеличивается на $0,02\text{ Н}$. Как изменится вес тела при увеличении температуры воздуха до 50°C , а давления до 800 мм рт. ст. ? Расширением тела можно пренебречь.

2.34. Тонкостенный резиновый шар массой 50 г наполнен азотом и погружен в озеро на глубину 100 м . Найдите массу азота, если шар находится в равновесии. Атмосферное давление 760 мм рт. ст. , температура в глубине озера 4°C . Натяжением резины можно пренебречь.

2.35. Определите подъемную силу воздушного шара объемом 100 м^3 , наполненного горячим воздухом при температуре 147°C . Шар сообщается с атмосферой. Температура наружного воздуха 27°C , его давление 700 мм рт. ст.

2.36. Сможет ли воздушный шар, наполненный гелием, удерживать груз массой 100 кг , если объем шара 150 м^3 , а масса оболочки 8 кг ? Давления и температуры гелия внутри шара и воздуха снаружи одинаковы и равны соответственно 10^5 Па и 15°C .

2.37. В комнате на полу лежит прочный полый шарик радиусом 2 см и массой 10 г . При каком давлении атмосферы он смог бы всплыть к потолку? Температура в комнате 20°C . Для оценки атмосфере считайте идеальным газом.

2.38. В баллоне объемом 10 л содержится водород при температуре 20°C под давлением 10^7 Па . Какую массу водорода выпустили из баллона, если при полном сгорании оставшегося газа образовалось 50 г воды?

2.39. В цилиндрический сосуд, лежащий на боку на горизонтальной поверхности, начинают медленно вдвигать с открытого конца гладкий поршень. Найдите давление воздуха в сосуде в тот момент, когда сосуд сдвинется с места. Масса сосуда вместе с поршнем 2 кг , площадь поршня 6 см^2 , атмосферное давление 100 кПа , коэффициент трения между горизонтальной поверхностью и сосудом $0,3$.

2.40. В открытой с обоих концов горизонтальной трубке с площадью поперечного сечения 10 см^2 на расстоянии 10 см от одного из ее концов находится поршень. С этого же конца вставляют и начинают двигать в трубку другой поршень. При каком расстоянии между поршнями первый поршень сдвинется с места? Сила трения скольжения, действующая на поршень со стороны стенок трубки, равна 100 Н , атмосферное давление 10^5 Па . Температуру считайте постоянной, толщиной поршней можно пренебречь.

2.41. Два одинаковых сосуда соединены трубкой, объе-

мом которой можно пренебречь. Система наполнена газом под давлением p_0 . Во сколько раз нужно изменить температуру газа в одном из сосудов, чтобы давление во всей системе стало p_1 ?

2.42. В первом сосуде, объемом 7 л, газ находится под давлением 50 кПа, а во втором, объемом 15 л, — под давлением 100 кПа. Температура газа в сосудах одна и та же. Какое давление установится в сосудах после их соединения?

2.43. Полагая, что воздух состоит только из кислорода и азота, определите процентное содержание этих газов в атмосфере.

2.44. Определите плотность смеси, содержащей 4 г водорода и 32 г кислорода при температуре 7°C и общем давлении 10^5 Па.

2.45. Камера заполняется смесью водорода с кислородом при температуре 27°C . Парциальные давления газов в камере одинаковы. Камера герметизируется, и происходит взрыв. Сразу после завершения реакции соединения водорода с кислородом давление в камере оказывается вдвое больше первоначального. Какова температура в камере в этот момент?

2.46. Во сколько раз плотность сухого воздуха больше плотности содержащегося в нем водяного пара, если относительная влажность воздуха 90 %, атмосферное давление 100 кПа, а давление насыщенного водяного пара при температуре воздуха 2,2 кПа?

2.47. Смешали 1 м^3 воздуха влажностью 20 % и 2 м^3 воздуха влажностью 30 %. При этом обе порции были взяты при одинаковых температурах. Определите относительную влажность смеси.

2.48. В герметически закрытом сосуде находится воздух, температура которого 100°C , а относительная влажность 3,5 %. Какой станет относительная влажность воздуха, если его охладить до температуры 29°C ? Изменением объема сосуда при его охлаждении можно пренебречь.

2.49. В сосуде объемом 1 м^3 при температуре 20°C находится воздух с относительной влажностью 30 %. Найдите относительную влажность после добавления в сосуд 5 г воды и полного ее испарения. Температура поддерживается постоянной.

2.50. В баллоне емкостью 3 л находится воздух с относительной влажностью 60 % при температуре 17°C . Какой будет влажность воздуха, если в баллон добавить 1 г воды, а температуру повысить до 100°C ?

2.51. В откачанный и герметически закрытый сосуд емкостью 10 л поместили 5 г воды, после чего сосуд прогрели до 100°C . Какая масса воды испарилась?

2.52. Определите относительную влажность воздуха, находившегося в баллоне емкостью 83 л при температуре

100 °С, если до полного насыщения пара понадобилось испарить в этот объем дополнительно 18 г воды.

2.53. Воздух в комнате объемом 50 м³ имеет температуру 27 °С и относительную влажность 30 %. Сколько времени должен работать увлажнитель воздуха, распыляющий воду с производительностью 2 кг/ч, чтобы относительная влажность в комнате повысилась до 70 %?

2.54. Воздух, находящийся при температуре 20 °С, имеет влажность 100 %. Какое количество росы (в граммах) выпадет из 1 м³ воздуха, если его охладить до 17 °С? Охлаждение водяного пара считайте изохорическим.

2.55. Из плохо закрытого крана капает вода. Определите массу вытекшей за сутки воды, если время между отрывом ближайших капель 1 с. Диаметр шейки капли в момент ее отрыва считайте равным внутреннему диаметру трубы крана размером 1 см.

2.56. Какая масса воды может подняться по смачиваемой ею капиллярной трубке радиусом 0,25 мм?

2.57. Смачиваемый водой кубик массой 200 г плавает на поверхности воды. Ребро кубика имеет длину 10 см. На каком расстоянии от поверхности воды находится нижняя грань кубика?

2.58. Определите разность уровней ртути в двух сообщающихся капиллярах с диаметрами 1 мм и 3 мм.

2.59. Конец капиллярной трубки опущен в воду. Какое количество теплоты выделится при поднятии жидкости по капилляру?

2.60. Какую работу надо совершить, чтобы выдуть мыльный пузырь радиусом 4 см?

Основы термодинамики

2.61. Для измерения температуры воды, имеющей массу 66 г, в нее погрузили термометр, который показал 32,4 °С. Какова действительная температура воды, если теплоемкость термометра 1,9 Дж/К и перед погружением в воду он показывал температуру помещения 17,8 °С?

2.62. В медном сосуде массой 2 кг нагревается до расплавления 0,8 кг олова от 22 °С до 232 °С. Какое количество теплоты потребуется для этого, если считать начальную и конечную температуры сосуда и олова одинаковыми?

2.63. Рабочий, забивая гвоздь массой 50 г в доску, ударяет 20 раз молотком, масса которого 0,5 кг. Импульс молотка непосредственно перед ударом 6 Н·с. На сколько градусов нагреется гвоздь, если все выделившееся количество теплоты при ударах пошло на его нагревание?

2.64. Лазер излучает световые импульсы с энергией 0,1 Дж. Частота повторения импульсов 10 Гц. КПД лазера, определяемый отношением излучаемой энергии к потребляемой, составляет 0,01. Какой объем воды нужно прока-

чать за 1 ч через охлаждающую систему лазера, чтобы вода нагрелась не более чем на 10°C ?

2.65. С какой высоты должен был бы падать град с температурой 0°C , чтобы градинки при ударе о землю расплавились? Для оценки сопротивление воздуха можно не учитывать.

2.66. Кусок свинца ударяется о препятствие со скоростью 350 м/с . Какая часть свинца расплавится, если все тепло, выделяемое при ударе, поглощается свинцом? Температура свинца перед ударом 27°C .

2.67. Нагретая железная болванка массой $3,3\text{ кг}$ ставится на поверхность льда, имеющего температуру 0°C . После охлаждения болванки до 0°C под ней расплавилось 460 г льда. Какова была температура нагретой болванки? Рассеяние тепла в окружающую среду можно не учитывать.

2.68. В сосуд, содержащий $0,6\text{ кг}$ воды при температуре 10°C , опускают $0,8\text{ кг}$ льда, взятого при -20°C . Пренебрегая теплообменом с окружающей средой и теплоемкостью сосуда, определите температуру и состав содержимого в сосуде.

2.69. С какой высоты должны были бы свободно падать дождевые капли, чтобы при ударе о землю от них не осталось мокрого места? Начальная температура капель 20°C . Для оценки сопротивление воздуха можно не учитывать.

2.70. В чайник налили воду при температуре 10°C и поставили на электроплитку. Через 10 мин вода закипела. Через какое время вода полностью выкипит?

2.71. В тонкостенный сосуд с водой, объем которой $0,25\text{ л}$, а температура 20°C , поместили 50 г расплавленного свинца, имеющего температуру 400°C . Какая температура установится в результате теплообмена? Потерями тепла можно пренебречь.

2.72. В цилиндре под невесомым поршнем площадью 100 см^2 находится 1 кг воды при температуре 0°C . В цилиндре включают нагреватель мощностью 500 Вт . На сколько поднимется поршень за 15 мин работы нагревателя, если атмосферное давление 760 мм рт. ст. ? Считайте, что все джоулево тепло идет на нагревание воды.

2.73. Чему равно давление одноатомного газа, занимающего объем 2 л , если его внутренняя энергия равна 300 Дж ?

2.74. Одноатомный газ массой 5 кг (молярная масса газа 4 г/моль) нагревают на 150 градусов при постоянном объеме. Найдите количество теплоты, сообщенное газу.

2.75. Одноатомный идеальный газ изотермически расширился из состояния с давлением 10^6 Па и объемом 1 л до состояния с вдвое большим объемом. Найдите внутреннюю энергию газа в конечном состоянии.

2.76. Сосуд содержит 1,28 г гелия при температуре 27°C . Во сколько раз изменится средняя квадратичная скорость молекул гелия, если его адиабатически сжать, совершив работу 252 Дж?

2.77. Для изобарного нагревания 800 моль газа на 500 К газу сообщили количество теплоты, равное 9,4 МДж. Определите работу газа и приращение его внутренней энергии.

2.78. Какую работу совершил один моль идеального газа в процессе 1—2 (рис. 39), если его температура увеличилась от T_1 до T_2 ?

2.79. Один моль идеального одноатомного газа расширяется по закону $pV^3 = \text{const}$ от объема V_1 и давления p_1 до объема V_2 . Определите изменение внутренней энергии газа.

2.80. Один моль идеального газа перевели из состояния 1 в состояние 2 изохорически так, что его давление уменьшилось в 1,5 раза, а затем изобарически нагрели до первоначальной температуры T_1 . При этом газ совершил работу 0,83 кДж. Найдите температуру T_1 .

2.81. Некоторую массу m идеального газа с молярной массой M нагревают под поршнем так, что его температура, изменяясь пропорционально квадрату давления, возрастает от первоначального значения T_1 до T_2 . Определите работу, совершенную газом.

2.82. В цилиндре под поршнем находится газ. Поршень соединен с дном цилиндра пружиной, упругие свойства которой подчиняются закону Гука. При нагревании газа его объем изменяется от V_1 до V_2 , а давление — от p_1 до p_2 . Пренебрегая трением и массой поршня, определите совершаемую газом работу.

2.83. В герметичном сосуде объемом 5,6 л содержится воздух при давлении 10^5 Па. Какое давление установится в сосуде, если воздуху сообщить количество теплоты, равное 1430 Дж? Молярную теплоемкость воздуха при постоянном объеме принять равной 21 Дж/(моль·К).

2.84. В изотермическом процессе газ совершил работу 1000 Дж. На сколько увеличится внутренняя энергия этого газа, если ему сообщить количество теплоты, вдвое большее, чем в первом случае, а процесс проводить изохорически?

2.85. При изобарическом нагревании 12 г гелия он совершил работу 1 кДж. На сколько изменилась температура газа и какое количество теплоты ему было передано?

2.86. При нагревании 1 кг газа на 1 К при постоянном давлении требуется 912 Дж тепла, а при нагревании при постоянном объеме — 649 Дж. Какой это газ?

2.87. В цилиндре с площадью основания 100 см^2 находится газ при температуре 27°C . На высоте 30 см от основания цилиндра расположен поршень массой 60 кг.

Какую работу совершит газ при расширении, если его температуру медленно повысить на 50°C ? Атмосферное давление равно 10^5 Па.

2.88. Какую работу совершит воздух, масса которого 200 г, при его изобарном нагревании на 20 К? Какое количество теплоты при этом будет передано воздуху? Удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении равна $14 \text{ кДж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$.

2.89. Найдите количество теплоты, которое получает одноатомный идеальный газ в процессе $1-2-3$ (рис. 40). В состоянии 1 давление газа равно 10^5 Па, а объем — 100 л.

2.90. Один моль одноатомного идеального газа сначала нагревают, затем охлаждают так, что замкнутый цикл $1-2-3-1$ на p, V -диаграмме состоит из отрезков прямых $1-2$ и $3-1$, параллельных осям p и V соответственно, и изотермы $2-3$. Найдите количество теплоты, отданное газом в процессе охлаждения. Давление и объем газа в состоянии 1 равны p_1 и V_1 , давление газа в состоянии 2 равно p_2 .

2.91. Газ, имеющий в начальном состоянии 1 температуру T , охлаждают при постоянном объеме (рис. 41; участок $1-2$), пока давление не уменьшится в n раз. После чего газ нагревают при постоянном давлении до первоначальной температуры T (на участке $2-3$). Найдите совершенную газом работу, если его масса m , а молярная масса M .

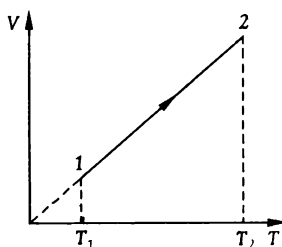


Рис. 39

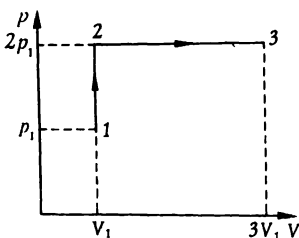


Рис. 40

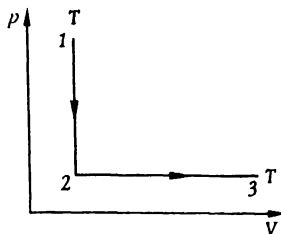


Рис. 41

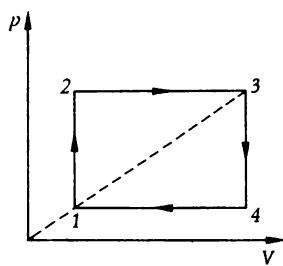


Рис. 42

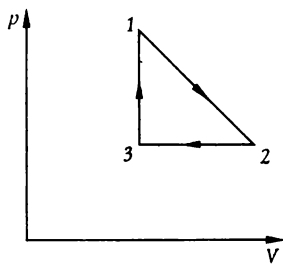


Рис. 43

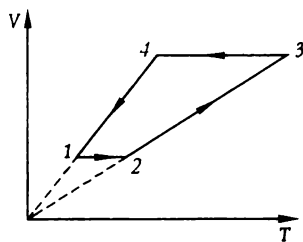


Рис. 44

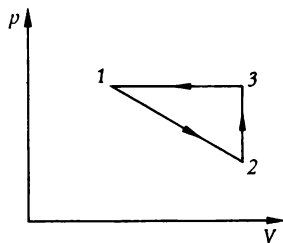


Рис. 45

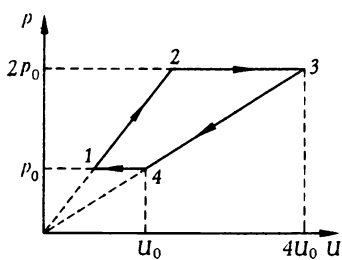


Рис. 46

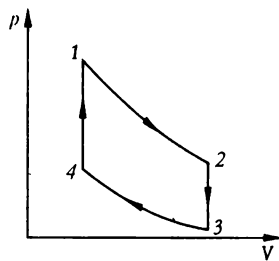


Рис. 47

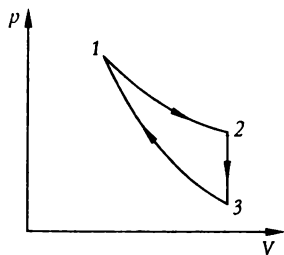


Рис. 48

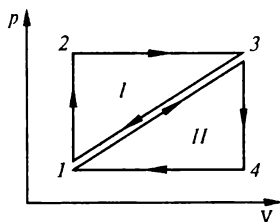


Рис. 49

2.92. Найдите работу, совершаемую одним молем идеального газа в цикле $1-2-3-4-1$ (рис. 42), если известны температуры T_1 и T_3 в точках 1 и 3 соответственно, причем эти точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат.

2.93. Идеальный газ расширяется из состояния 1 до состояния 2 (рис. 43), увеличивая свой объем в 2 раза. При этом давление изменяется по линейному закону, а температура в состоянии 2 равна температуре в состоянии 1. Затем газ изобарически сжимается до исходного объема, переходя в состояние 3. Из состояния 3 газ изохорически переводится в исходное состояние 1. Какую работу совершает 1 моль газа за рассмотренный цикл, если его температура в состоянии 1 равна T ?

2.94. Над идеальным газом массой 20 г и молярной массой 28 г/моль совершается циклический процесс (рис. 44). Какова работа газа за один цикл, если температуры в точках 1 и 2 равны 300 К и 496 К соответственно? При расширении газа на участке 2-3 его объем увеличивается в два раза.

2.95. Один моль одноатомного идеального газа совершает замкнутый цикл, состоящий из процесса с линейной зависимостью давления от объема, изохоры и изобары (рис. 45). Найдите количество теплоты, подведенное к газу на участках цикла, где температура газа растет. Температура газа в состояниях 1 и 2 равна 300 К, отношение объемов на изобаре равно 5/2.

2.96. Какую работу совершит идеальный тепловой двигатель, имеющий температуру нагревателя 527°C и холодильника 47°C , если от нагревателя получено количество теплоты, равное 20 кДж?

2.97. Тепловая машина работает по циклу Карно, и ее КПД равен 60 %. Во сколько раз количество теплоты, полученное при изотермическом расширении рабочего вещества, больше количества теплоты, отданного при изотермическом сжатии?

2.98. Один моль идеального газа совершает цикл, изображенный на рисунке 46 в координатах p и U , где p — давление, U — внутренняя энергия газа. Определите КПД цикла.

2.99. Количество теплоты, получаемое тепловой машиной от нагревателя, равно 1 кДж. При этом объем газа увеличивается от 1 л до 2 л, а давление линейно убывает в зависимости от объема от 1000 кПа до 400 кПа. Найдите изменение внутренней энергии газа.

2.100. Определите КПД цикла, состоящего из двух адиабат и двух изохор, совершаемого одноатомным идеальным газом (рис. 47). Известно, что в процессе адиабатического расширения устанавливается температура $T_2 = 0,75 T_1$, а в процессе адиабатического сжатия — $T_3 = 0,75 T_4$.

2.101. Тепловая машина с максимально возможным КПД имеет в качестве нагревателя резервуар с кипящей водой при температуре 100°C , а в качестве холодильника — сосуд со льдом при 0°C . Какая масса льда растает при совершении машиной работы, равной 10^6 Дж?

2.102. Коэффициент полезного действия некоторой тепловой машины составляет 60 % от коэффициента полезного действия идеальной машины, работающей по циклу Карно. Температуры нагревателей и холодильников этих машин одинаковы. Пар поступает в машину при температуре 200°C , а температура конденсатора машины составляет 60°C . Мощность машины 314 кВт. Сколько угля расходует машина за 1 ч работы?

2.103. КПД тепловой машины, работающей по циклу, состоящему из изотермы $1-2$, изохоры $2-3$ и адиабаты $3-1$ (рис. 48), равен η , а разность максимальной и минимальной температур газа в цикле равна ΔT . Найдите работу, совершенную ν молями одноатомного идеального газа в изотермическом процессе.

2.104. Идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу Карно, передает тепло от холодильника с водой при температуре 0°C кипятивнику с водой при температуре 100°C . Сколько воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар 1 кг воды в кипятивнике?

2.105. Найдите отношение КПД тепловых машин, работающих по циклам $1-2-3-1$ и $1-3-4-1$ (рис. 49), если КПД машины, работающей по циклу $1-2-3-4-1$, равен η . В качестве рабочего тела во всех случаях используется идеальный газ.

Глава 3

Основы электродинамики

Электростатика

3.1. Два одинаковых заряженных шарика притягиваются друг к другу. После того как шарики привели в соприкосновение и раздвинули на расстояние в 2 раза большее, чем прежде, сила взаимодействия между ними уменьшилась в 12 раз. Каков был заряд первого шарика до соприкосновения, если заряд второго шарика был равен 1 Кл?

3.2. Два точечных заряда $0,6$ мкКл и $-0,3$ мкКл находятся в вакууме на расстоянии 10 см друг от друга. Определите положение точки, в которой напряженность поля, создаваемого этими зарядами, равна нулю.

3.3. В вершинах квадрата со стороной a расположены четыре одинаковых по величине заряда q : два положи-

тельных и два отрицательных. Определите напряженность электрического поля в точке пересечения диагоналей квадрата (рассмотрите все возможные случаи).

3.4. Две бесконечные одноименно и равномерно заряженные плоскости пересекаются под прямым углом друг к другу (рис. 50). Найдите напряженность электростатического поля в точке A , расположенной вблизи линии пересечения. Поверхностная плотность заряда равна 10^{-9} Кл/м² и одинакова для обеих плоскостей.

3.5. При внесении заряженного металлического шарика, подвешенного на изолирующей нити, в однородное горизонтальное электрическое поле нить образовала с вертикалью угол 45° . На сколько уменьшится угол отклонения нити при стекании с шарика одной десятой доли его заряда?

3.6. Электрон влетел в однородное электрическое поле с напряженностью $10\,000$ В/м со скоростью 8 Мм/с перпендикулярно силовым линиям поля. Найдите величину и направление его скорости через 2 нс.

3.7. Два заряженных шарика с массами $0,2$ г и $0,8$ г, обладающих зарядами $3 \cdot 10^{-7}$ Кл и $2 \cdot 10^{-7}$ Кл соответственно, соединены легкой непроводящей нитью длиной 20 см и движутся вдоль силовой линии однородного электрического поля. Напряженность поля равна 10^4 Н/Кл и направлена вертикально вниз. Определите ускорение шариков и натяжение нити.

3.8. Шарик массой 2 г, имеющий заряд $2,5 \cdot 10^{-9}$ Кл, подвешен на нити и движется в горизонтальной плоскости по окружности радиусом 3 см с частотой 2 с⁻¹. В центр окружности помещают шарик с таким же зарядом. Какой должна стать частота вращения первого шарика, чтобы радиус окружности не изменился?

3.9. Тонкое проволочное кольцо радиусом R несет на себе электрический заряд q . В центре кольца расположен одноименный ему заряд Q , причем $Q \gg q$. С какой силой растянuto кольцо?

3.10. Определите разность потенциалов, которую должен пройти в электрическом поле электрон, имеющий скорость 10^6 м/с, чтобы его скорость возросла в 2 раза.

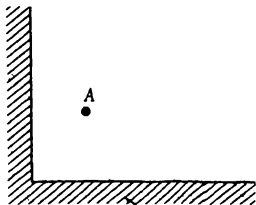


Рис. 50

3.11. Найдите разность потенциалов между точками A и B электростатического поля, создаваемого двумя бесконечными равномерно заряженными плоскостями (рис. 51). Поверхностные плотности заряда равны соответственно $2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м² и $4,2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м², расстояния a и b составляют 7 см и 5 см.

3.12. Проводящий шар радиусом 1 м равномерно заряжен по поверхности зарядом 1 нКл. Каково минимальное расстояние между точками A и B такими, что разность потенциалов между ними равна -1 В?

3.13. Две металлические пластины A и B находятся на расстоянии 10 мм друг от друга. Между ними на расстоянии 2 мм от пластины A находится металлическая пластина C толщиной 2 мм. Найдите потенциал этой пластины, если потенциалы пластин A и B равны соответственно 50 В и -60 В. Поле между пластинами можно считать однородным.

3.14. На расстоянии R от центра незаряженного металлического шара находится точечный заряд q . Определите потенциал шара.

3.15. Протон на большом расстоянии от проводника, потенциал которого равен -3 кВ, имел скорость 10^6 м/с. Траектория протона заканчивается на поверхности проводника. Какую скорость будет иметь протон вблизи этой поверхности?

3.16. Сплошной металлический цилиндр радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью ω . Найдите зависимость напряженности электрического поля от расстояния r до оси цилиндра и разность потенциалов между поверхностью цилиндра и осью.

3.17. Шарик массой 2 г, имеющий положительный заряд q , начинает скользить без начальной скорости из точки A по сферической поверхности радиусом 10 см (рис. 52). Потенциальная энергия взаимодействия заряда q и неподвижного отрицательного заряда Q в начальный

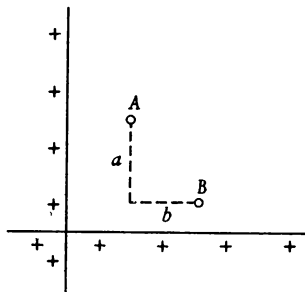


Рис. 51

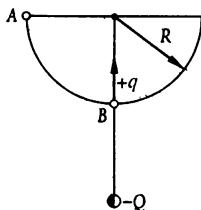


Рис. 52

момент составляет $-2 \cdot 10^{-3}$ Дж. Определите потенциальную энергию взаимодействия зарядов, когда шарик находится в точке B , если в этом случае результирующая сила реакции со стороны сферической поверхности и кулоновского взаимодействия, приложенная к шарiku, равна 0,1 Н. Трением можно пренебречь.

3.18. Пучок протонов, ускоренных разностью потенциалов 20 кВ, падает на заземленную металлическую пластинку нормально к ее поверхности. Полагая, что все протоны поглощаются пластинкой, определите силу, с которой пучок действует на пластинку, если ток в пучке равен 80 мА. Силой тяжести можно пренебречь.

3.19. Два электрона находятся на бесконечно большом расстоянии друг от друга, причем первый электрон покоится, а второй имеет скорость, равную v_0 и направленную к первому электрону. Определите наименьшее расстояние, на которое они сблизятся.

3.20. Три одинаковые заряженные частицы, каждая массой 2 г и зарядом 10^{-8} Кл, поместили в вершинах равностороннего треугольника со стороной 10 см. Затем частицы одновременно освободили, после чего они стали симметрично разлетаться под действием кулоновских сил отталкивания. Найдите максимальное значение скорости частиц.

3.21. Электрон, начавший движение без начальной скорости, прошел разность потенциалов 10 кВ и влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора, параллельно пластинам. Напряжение на конденсаторе 100 В, расстояние между пластинами 2 см, длина пластин 20 см. На сколько сместится след электрона на экране, отстоящем от конденсатора на 0,5 м?

3.22. Плоский конденсатор находится во внешнем однородном электрическом поле, перпендикулярном пластинам. Напряженность поля 1 кВ/м, площадь пластин конденсатора 100 см². Какие заряды окажутся на каждой из пластин, если конденсатор замкнуть проводником накоротко? Конденсатор до замыкания не заряжен.

3.23. В плоский конденсатор с размерами пластин $a \times b$ вдвигают параллельно стороне a с постоянной скоростью v диэлектрик толщиной d , равной расстоянию между пластинами конденсатора. Конденсатор подключен к полюсам батареи, напряжение которой равно U . Определите силу тока, возникающего в цепи. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика ϵ .

3.24. Два последовательно соединенных конденсатора, емкости которых 1 мкФ и 3 мкФ, подключены к источнику тока с напряжением 220 В. Найдите напряжение на каждом конденсаторе.

3.25. Конденсатор емкостью 3 мкФ, заряженный до разности потенциалов 100 В, и конденсатор емкостью

4 мкФ, заряженный до разности потенциалов 50 В, соединили параллельно разноименно заряженными обкладками. Какими будут заряды на каждом конденсаторе после соединения?

3.26. В двух одинаковых плоских конденсаторах пространство между обкладками заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью, равной 3: в одном наполовину, в другом полностью (рис. 53). Найдите отношение емкостей этих конденсаторов.

3.27. Плоский конденсатор имеет площадь пластин 2000 см^2 и расстояние между пластинами 0,5 мм. К одной из пластин прилегает изнутри диэлектрик толщиной 0,3 мм с диэлектрической проницаемостью, равной 7. Остальное пространство внутри конденсатора заполнено воздухом. Определите емкость такого конденсатора.

3.28. Во сколько раз увеличится разность потенциалов на обкладках конденсатора емкостью C_3 (рис. 54) при пробое конденсатора емкостью C_2 , если емкости трех конденсаторов равны соответственно 200 пФ, 600 пФ и 800 пФ?

3.29. На рисунке 55 приведена электрическая цепь, в которой напряжение источника равно 10 В, а каждый конденсатор имеет емкость 10 мкФ. Какой заряд протечет через батарею после замыкания ключа K ? Каким станет при этом заряд конденсатора C_1 ?

3.30. На точечный заряд, находящийся внутри плоского конденсатора, действует некоторая сила. Напряжение на конденсаторе 10 кВ, его емкость 100 мкФ. Во сколько раз увеличится сила, действующая на заряд, если конденсатор в течение 2 мин подзаряжать током 0,1 А?

3.31. Напряженность электрического поля плоского воздушного конденсатора емкостью 4 мкФ равна 10 В/см. Расстояние между обкладками 1 мм. Определите энергию электрического поля конденсатора.

3.32. Плоский воздушный конденсатор после зарядки отключают от источника и погружают в керосин с диэлектрической проницаемостью ϵ . Как изменится энергия, накопленная в конденсаторе?

3.33. Конденсатор емкостью 100 мкФ заряжают постоянным током через резистор сопротивлением 100 кОм. Через какое время после начала зарядки энергия, запасенная в конденсаторе, станет равной энергии, выделенной в резисторе?

3.34. Конденсатор емкостью C подсоединен к источнику тока с напряжением U . Какую работу необходимо совершить, чтобы вдвое увеличить расстояние между обкладками конденсатора? Какую работу совершает при этом источник?

3.35. Плоский воздушный конденсатор заполнили керосином (диэлектрическая проницаемость равна 2),

зарядили, сообщив ему энергию $2 \cdot 10^{-5}$ Дж, и отключили от источника питания. Какая энергия будет запасена в конденсаторе, если из него слить керосин?

3.36. Конденсатор, подключенный к источнику тока проводами сопротивлением 100 Ом, имеет первоначальную емкость 2 мкФ. Затем его емкость за некоторое время равномерно увеличивают в 5 раз. При этом в подводящих проводах выделяется в виде тепла 2,56 мДж энергии. Сколько времени длилось увеличение емкости конденсатора? Напряжение на конденсаторе считайте постоянным и равным 2 кВ.

3.37. Конденсатор емкостью C , заряженный до напряжения U , разряжается через нагрузочное сопротивление на батарею с ЭДС \mathcal{E} и очень малым внутренним сопротивлением (рис. 56). Какое количество теплоты выделится в нагрузочном сопротивлении после замыкания ключа?

3.38. Плоский воздушный конденсатор емкостью $5 \cdot 10^{-9}$ Ф заряжен до напряжения 2 В. Какую работу нужно совершить, чтобы, раздвигая обкладки, увеличить расстояние между ними в 2 раза? После зарядки конденсатор отключен от источника.

3.39. Два одинаковых плоских конденсатора, один из которых воздушный, а другой заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ , соединены, как показано на рисунке 57, и заряжены до напряжения U . Какую работу нужно совершить, чтобы вытащить диэлектрическую пластинку из конденсатора? Емкость воздушного конденсатора равна C .

3.40. Какое количество теплоты выделится в цепи (рис. 58) при переключении ключа K из положения 1 в положение 2?

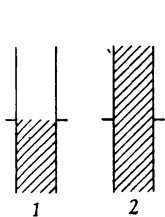


Рис. 53

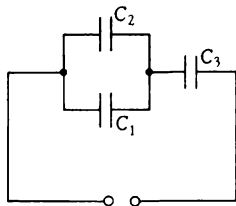


Рис. 54

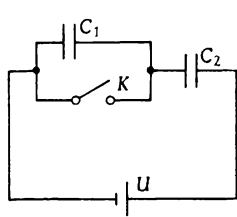


Рис. 54

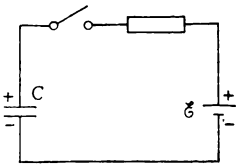


Рис. 56

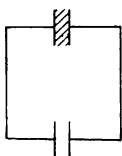


Рис. 57

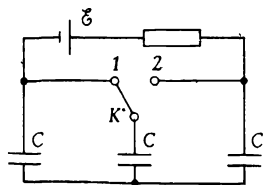


Рис. 58

3.41. Из куска проволоки сопротивлением 100 Ом сделано кольцо. В каких точках кольца следует присоединить провода, подводящие ток, чтобы сопротивление между ними равнялось 9 Ом?

3.42. При замкнутом ключе K (рис. 59) сила тока, текущего через амперметр, равна 0,45 А. Какой ток будет течь через амперметр при разомкнутом ключе? Напряжение на клеммах считайте постоянным.

3.43. Три одинаковых резистора, включенных последовательно, имеют полное сопротивление 9 Ом. Чему будет равно сопротивление, если эти же резисторы включить параллельно?

3.44. Определите общее сопротивление электрической цепи, изображенной на рисунке 60.

3.45. Из резисторов с сопротивлением 12 Ом (R) и 6 Ом (r) спаяна цепь, изображенная на рисунке 61. Определите сопротивление между точками A и B цепи.

3.46. Вольтметр со шкалой на 100 В имеет сопротивление 10 кОм. Какую наибольшую разность потенциалов можно измерить этим прибором, если присоединить к нему добавочное сопротивление 90 кОм?

3.47. Стороны проволочного куба имеют одинаковые сопротивления 2 Ом. Ток в ребре, указанном на рисунке 62, равен 0,1 А. Определите разность потенциалов между точками A и B .

3.48. Амперметр с сопротивлением 2 Ом, подключенный к источнику тока, показывает ток 5 А. Вольтметр с сопротивлением 150 Ом, подключенный к такому же источнику тока, показывает напряжение 12 В. Найдите ток короткого замыкания источника.

3.49. Аккумулятор с внутренним сопротивлением 0,5 Ом замыкают на резистор сопротивлением 500 Ом. Для измерения силы тока в резисторе последовательно с ним включают амперметр, сопротивление которого 10 Ом. Какую допускают относительную погрешность, если показание амперметра принимают за искомую величину?

3.50. Батарея гальванических элементов с ЭДС 15 В и внутренним сопротивлением 5 Ом замкнута проводником, имеющим сопротивление 10 Ом. К полюсам батареи подключен конденсатор емкостью 1 мкФ. Определите величину заряда на обкладках конденсатора.

3.51. При замкнутом ключе K (рис. 63) вольтметр V_1 показывает напряжение 0,8 Э (Э — ЭДС батареи). Что покажут вольтметры V_1 и V_2 при разомкнутом ключе, если их сопротивления равны?

3.52. В цепь, состоящую из аккумулятора и резистора сопротивлением 10 Ом, включают вольтметр: сначала последовательно, а затем параллельно резистору. При

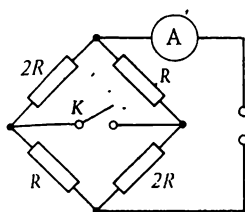


Рис. 59

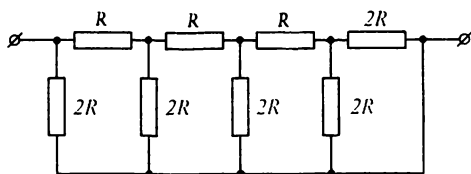


Рис. 60

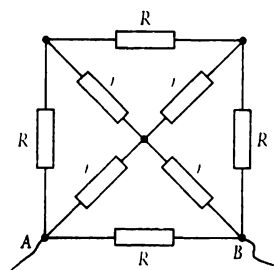


Рис. 61

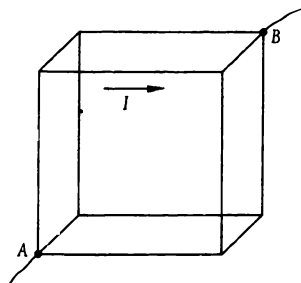


Рис. 62

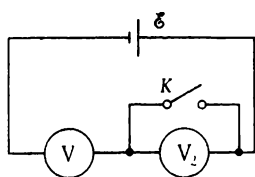


Рис. 63

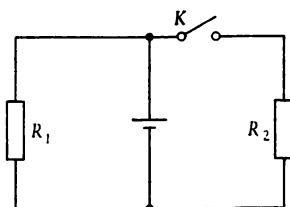


Рис. 64

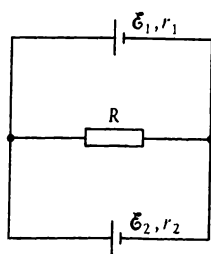


Рис. 65

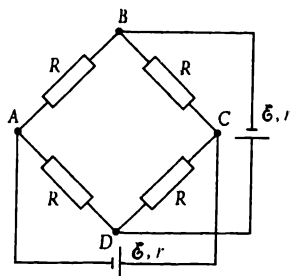


Рис. 66

этом показания вольтметра оказываются одинаковыми. Сопротивление вольтметра 1 кОм . Каково внутреннее сопротивление аккумулятора?

3.53. В схеме, показанной на рисунке 64, резисторы R_1 и R_2 имеют сопротивления 1 Ом и 2 Ом соответственно. Определите внутреннее сопротивление батареи, если известно, что при разомкнутом ключе через резистор R_1 протекает ток $2,8\text{ А}$, а при замкнутом ключе через резистор R_2 протекает ток 1 А .

3.54. Два источника тока с ЭДС 4 В и 6 В и внутренними сопротивлениями $0,1\text{ Ом}$ и $0,4\text{ Ом}$ соединены последовательно. При каком внешнем сопротивлении цепи разность потенциалов между зажимами одного из источников будет равной нулю?

3.55. В схеме (рис. 65) источники имеют ЭДС 2 В и 1 В соответственно, а внутренние сопротивления — по 1 Ом каждый. При каком сопротивлении резистора ток через второй источник не пойдет?

3.56. Зарядка аккумулятора производится током 4 А . Напряжение на клеммах аккумулятора при зарядке равно $12,6\text{ В}$. При разрядке того же аккумулятора током 6 А напряжение на клеммах составляет $11,1\text{ В}$. Найдите ток короткого замыкания.

3.57. Аккумулятор с внутренним сопротивлением $0,8\text{ Ом}$ разрядился до напряжения 12 В , и его поставили на подзарядку к источнику с ЭДС 20 В . При каком добавочном сопротивлении ток зарядки не превысит допустимого тока аккумулятора, равного 2 А ?

3.58. На рисунке 66 изображена так называемая мостовая схема из четырех одинаковых резисторов сопротивлением R и двух одинаковых батареек с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r . Найдите величины токов, текущих через резисторы.

3.59. Определите заряд конденсатора емкостью 2 мкФ в электрической цепи, показанной на рисунке 67, если сопротивления резисторов равны соответственно 20 Ом ,

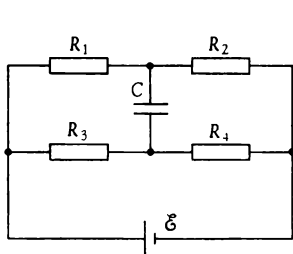


Рис. 67

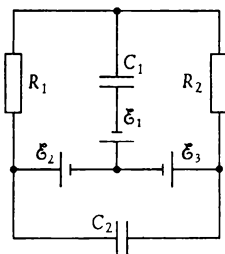


Рис. 68

30 Ом, 10 Ом и 40 Ом, ЭДС источника 10 В, а его внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.

3.60. Определите заряды конденсаторов в цепи (рис. 68), если их емкости 4 мкФ и 2 мкФ, сопротивления резисторов 100 Ом и 300 Ом. ЭДС источников 5 В, 10 В и 15 В. Внутренние сопротивления источников равны нулю.

3.61. Какое количество меди выделилось из раствора медного купороса за 100 с, если ток, протекающий через электролит, менялся по закону $I(t) = (5 - 0,02 t)$ А, где t — время в секундах?

3.62. При электролизе раствора серной кислоты за 50 мин выделилось 0,3 г водорода. Определите мощность, расходуемую на нагревание электролита, если его сопротивление 0,4 Ом.

3.63. Из комнаты в течение суток теряется $8,7 \cdot 10^7$ Дж тепла. Какой длины надо взять нихромовую проволоку диаметром 10^{-3} м для намотки электрической печи, поддерживающей постоянную температуру в комнате?

3.64. При ремонте электроплитки ее спираль укоротили на 0,1 ее первоначальной длины. Во сколько раз при этом изменилась мощность плитки?

3.65. Два проводника, сопротивления которых 7 Ом и 5 Ом, соединили параллельно и подключили к источнику тока. В первом проводнике в течение некоторого времени выделилось 300 Дж тепла. Какое количество теплоты выделилось во втором проводнике за то же время?

3.66. На резисторе сопротивлением 9 Ом, подключенном к источнику тока с ЭДС 3,1 В, выделяется мощность 1 Вт. Определите внутреннее сопротивление источника тока.

3.67. Элемент с ЭДС 6 В дает максимальный ток 3 А (при коротком замыкании). Какова наибольшая мощность, которая может быть выделена на внешнем сопротивлении?

3.68. Суммарная мощность, выделяющаяся на резисторах, сопротивления которых 10 Ом и 3 Ом, одинакова при последовательном и параллельном соединениях резисторов. Найдите внутреннее сопротивление источника тока, питающего эти резисторы.

3.69. Лампа мощностью 500 Вт рассчитана на напряжение 110 В. Определите величину дополнительного сопротивления, позволяющего включить ее в сеть с напряжением 200 В без изменения ее мощности.

3.70. Батарея, имеющая ЭДС 60 В и внутреннее сопротивление 4 Ом, замкнута на внешнюю цепь, потребляющую мощность 200 Вт. Определите силу тока в цепи, падение напряжения на внешней цепи и сопротивление внешней цепи.

3.71. Аккумулятор заряжается от источника напряжением 12 В, при этом половина потребляемой мощности расходуется на тепло. Определите ЭДС аккумулятора.

3.72. Как при параллельном, так и при последовательном соединении двух одинаковых аккумуляторов на внешнем сопротивлении выделялась мощность 80 Вт. Какая мощность будет выделяться на этом сопротивлении, если замкнуть на него лишь один из аккумуляторов?

3.73. Батарейка для карманного фонаря имеет ЭДС 4 В и внутреннее сопротивление 2 Ом. Сколько таких батареек надо соединить последовательно, чтобы питать лампу мощностью 60 Вт, рассчитанную на напряжение 120 В?

3.74. Чему равно внутреннее сопротивление одного источника тока, если при включении восьми таких источников двумя параллельными группами по четыре источника, соединенных последовательно, в каждой группе, на нагрузочном сопротивлении 3 Ом выделяется такая же мощность, как и в случае последовательного соединения всех восьми источников?

3.75. Электромотор питается от батареи с ЭДС 12 В. Какую механическую работу совершает мотор за 1 с при протекании по его обмотке тока 2 А, если при полном затормаживании якоря в цепи течет ток 3 А?

3.76. Нагреватель электросамовара состоит из двух элементов. При подключении к сети первого элемента вода в самоваре закипает через 15 мин, при подключении только второго элемента — через 20 мин. Через какое время закипит вода в самоваре, если подключить к сети оба элемента последовательно? параллельно?

3.77. Электроэнергия передается от генератора к потребителю по проводам, общее сопротивление которых 400 Ом. Коэффициент полезного действия линии передачи 0,95. Определите сопротивление нагрузок, если внутреннее сопротивление генератора 100 Ом.

3.78. Во сколько раз нужно повысить напряжение источника, чтобы потери в линии электропередачи уменьшились в n раз? Мощность, отдаваемую источником, считайте постоянной.

3.79. Электродвигатель подъемного крана работает под напряжением 380 В и потребляет ток 20 А. Каков КПД установки, если груз массой 1 т кран поднимает равномерно на высоту 19 м за 50 с?

3.80. Троллейбус массой 11 т движется равномерно со скоростью 36 км/ч. Найдите силу тока в обмотке двигателя, если напряжение равно 550 В и КПД — 80 %. Коэффициент сопротивления движения равен 0,02.

Магнитное поле. Электромагнитная индукция

3.81. Проводящая перемычка длиной l скользит в однородном магнитном поле с индукцией B по проводящим рельсам, замкнутым на резистор сопротивлением R

(рис. 69). Какую силу нужно приложить к перемычке, чтобы двигать ее с постоянной скоростью v ?

3.82. Под влиянием однородного магнитного поля в нем движется с ускорением 2 м/с^2 прямолинейный проводник с поперечным сечением 1 мм^2 . Направление проводника перпендикулярно линиям индукции, по проводнику течет ток 1 А , плотность материала проводника $2,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Определите индукцию магнитного поля.

3.83. Проводник длиной l и массой m подвешен на тонких невесомых проволочках в однородном магнитном поле (рис. 70). При прохождении по проводнику тока I он отклоняется так, что нити образуют с вертикалью угол α . Какова индукция магнитного поля, перпендикулярного проводнику?

3.84. Электронно-лучевую трубку с отключенной управляющей системой помещают в однородное магнитное поле, перпендикулярное скорости движения электронов. При этом след пучка электронов на экране, удаленном на 14 см от места вылета электронов, смещается на 2 см . Какова скорость электронов, если индукция магнитного поля 25 мкТл ?

3.85. Проволочный квадрат с током находится в однородном магнитном поле. Плоскость квадрата перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определите угол между силами Ампера, действующими на противоположные стороны квадрата.

3.86. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30° , лежит квадратная проволочная рамка со стороной 15 см . Рамка находится в вертикальном магнитном поле с индукцией 15 Тл . Масса рамки 40 г . Какой минимальный ток нужно пропустить по рамке, чтобы она перевернулась, считая, что трение не позволяет ей скользить по плоскости?

3.87. По кольцу радиусом $2,5 \text{ см}$, сделанному из проволоки сечением $1,5 \text{ мм}^2$, течет ток 2 А . Кольцо помещено в однородное магнитное поле с индукцией, равной $0,1 \text{ Тл}$ и перпендикулярной плоскости кольца. Определите механическое напряжение в кольце.

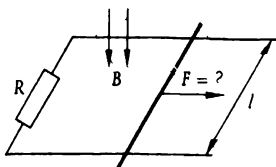


Рис. 69

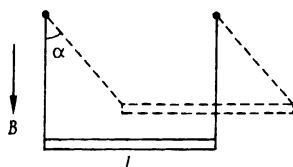


Рис. 70

3.88. Пройдя ускоряющую разность потенциалов 3520 В, электрон попал в однородное магнитное поле с индукцией 0,002 Тл, перпендикулярное скорости электрона. Найдите радиус окружности, по которой будет двигаться электрон.

3.89. Два иона, имеющие одинаковые заряды и одинаковые кинетические энергии, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле. Первый ион описал окружность радиусом 3 см, а второй — 1,5 см. Вычислите отношение масс ионов.

3.90. Две заряженные частицы, заряды которых равны, а масса первой в 4 раза больше массы второй, в однородном магнитном поле вращаются по окружностям одного и того же радиуса. Во сколько раз отличаются кинетические энергии частиц?

3.91. Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией 0,015 Тл со скоростью 10^3 км/с под углом 30° к направлению вектора магнитной индукции. Определите шаг винтовой линии, по которой будет двигаться электрон.

3.92. Электрон движется по окружности радиусом 10 см в однородном магнитном поле с индукцией 1 Тл. Параллельно магнитному полю возбуждается однородное электрическое поле с напряженностью 100 В/м. За какой промежуток времени кинетическая энергия электрона возрастет вдвое?

3.93. Протон влетает со скоростью 60 км/с в пространство с электрическим и магнитным полями, направления которых совпадают, перпендикулярно этим полям. Найдите напряженность электрического поля, если индукция магнитного поля равна 0,1 Тл, а начальное ускорение протона, вызванное действием этих полей, составляет 10^{12} м/с².

3.94. Однородные магнитное и электрическое поля перпендикулярны друг другу. Напряженность электрического поля равна 0,5 кВ/м, индукция магнитного поля — 1 мТл. С какой скоростью и в каком направлении должен лететь электрон, чтобы двигаться прямолинейно?

3.95. В плоскости XOY расположены длинный провод с током I и проводящая рамка (рис. 71). Возникнет ли индукционный ток в рамке при ее перемещении а) вдоль OX ; б) вдоль OY ? Укажите направление индукционного тока.

3.96. Два проволочных кольца разных диаметров расположены в одной плоскости в однородном магнитном поле, индукция которого с течением времени равномерно возрастает. В каком кольце индуцируется больший ток, если массы колец одинаковы и изготовлены они из одного и того же материала?

3.97. На рисунке 72 показан плоский контур из тонких

проводов, находящихся в однородном магнитном поле, которое направлено за плоскость рисунка (перемычка контура совпадает с диаметром кольца). Индукцию поля начали уменьшать. Укажите направления индукционных токов в контуре.

3.98. Проводник длиной 2 м движется со скоростью 10 м/с перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определите величину магнитной индукции, если на концах проводника возникает разность потенциалов 0,02 В.

3.99. Горизонтальный металлический стержень длиной 0,5 м равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из концов, с частотой 5 с^{-1} . Определите разность потенциалов между концами стержня, если вертикальная составляющая магнитного поля Земли равна $5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$.

3.100. Проводящий диск радиусом 0,05 м вращается с угловой скоростью $100 \pi \text{ с}^{-1}$ в однородном магнитном поле с индукцией 1 Тл, перпендикулярном плоскости диска (рис. 73). Что показывает амперметр, включенный через резистор сопротивления 1 Ом?

3.101. По двум параллельным проводникам, отстоящим друг от друга на 0,5 м, перемещают с постоянной скоростью 10 м/с проводник-перемычку (рис. 74). Между левыми концами проводников включены последовательно два конденсатора, причем емкость второго конденсатора в 1,5 раза больше емкости первого. Вся система находится в однородном магнитном поле, направленном перпендику-

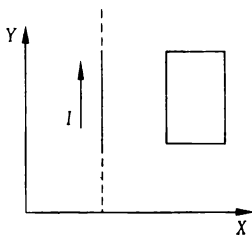


Рис. 71

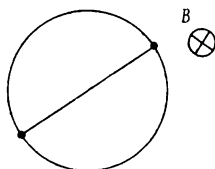


Рис. 72

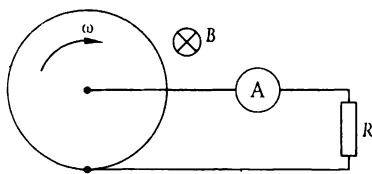


Рис. 73

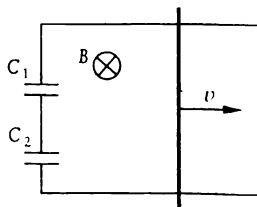


Рис. 74

лярно плоскости, в которой лежат проводники. Найдите величину индукции поля, если на втором конденсаторе напряжение равно 0,5 В. Сопротивление проводников пренебрежимо мало.

3.102. Короткозамкнутая катушка, состоящая из 1000 витков, помещена в магнитное поле, линии индукции которого направлены вдоль оси катушки. Индукция магнитного поля меняется со скоростью $5 \cdot 10^{-3}$ Тл/с. Площадь поперечного сечения катушки 40 см^2 , сопротивление катушки 160 Ом. Найдите мощность тепловых потерь.

3.103. В однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл находится виток площадью 10 см^2 , расположенный перпендикулярно линиям индукции. Сопротивление витка 2 Ом. Какой заряд протечет по витку при выключении поля?

3.104. Кусок провода длиной 8 м складывается вдвое и концы его замыкаются. Затем провод растягивается в квадрат в плоскости, перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля с индукцией 0,2 Тл. Какой заряд пройдет по проводу, если его сечение $0,1 \text{ мм}^2$, а удельное сопротивление материала провода $0,2 \text{ мкОм} \cdot \text{м}$?

3.105. В однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл расположен плоский проволочный виток так, что его плоскость перпендикулярна линиям индукции. Виток замкнут на гальванометр. При повороте витка через гальванометр протек заряд $9,5 \cdot 10^{-3}$ Кл. На какой угол повернули виток? Площадь витка 10^3 см^2 , сопротивление витка 2 Ом.

Глава 4

Колебания и волны

Механические колебания и волны

4.1. Уравнение гармонических колебаний имеет вид $x(t) = x_m \sin \omega t$. Известно, что при фазе $\pi/6$ смещение равно 2 см. Определите амплитуду колебаний и смещение при фазе $3\pi/4$.

4.2. Через какой промежуток времени после начала колебаний смещение точки из положения равновесия будет равно половине амплитуды, если период колебаний равен 24 с, а начальная фаза равна нулю?

4.3. Во сколько раз время прохождения колеблющейся точкой первой половины амплитуды меньше, чем время прохождения второй половины?

4.4. Шарик подвешен на длинной нити. Первый раз его поднимают до точки подвеса и отпускают, второй раз его

отклоняют на небольшой угол и тоже отпускают. В каком случае и во сколько раз быстрее шарик возвратится в начальное положение?

4.5. Один из двух математических маятников совершил 10 колебаний, другой за это же время — 6 колебаний. Разность длин маятников составляет 16 см. Определите длины маятников и периоды их колебаний.

4.6. Два математических маятника имеют периоды колебаний T_1 и T_2 . Какой период колебаний будет у математического маятника, длина которого равна сумме длин указанных маятников?

4.7. Период колебаний математического маятника на Земле равен 1 с. Чему будет равен период колебаний этого маятника на Луне?

4.8. На Марсе время падения тела, отпущенного без начальной скорости с некоторой высоты, на поверхность планеты в 2,6 раза больше времени падения с той же высоты на Земле. Во сколько раз период колебаний математического маятника на Марсе отличается от периода колебаний на Земле?

4.9. С каким ускорением и в каком направлении должна двигаться кабина лифта, чтобы находящийся в ней секундный маятник за время 2 мин 30 с совершил 100 колебаний?

4.10. Небольшой шарик массой 21 г, подвешенный на нерастяжимой изолирующей нити на высоте 12 см от большой горизонтальной проводящей плоскости, совершает малые колебания. После того как ему сообщили некоторый заряд, период колебаний изменился в 2 раза. Найдите этот заряд.

4.11. Шарик массой m и зарядом Q , закрепленный на изолирующей нити длиной l в однородном электрическом поле, колеблется с периодом $2\pi\sqrt{l/g}$ относительно положения равновесия, находящегося на одной вертикали с точкой подвеса. Определите величину и направление напряженности электрического поля.

4.12. Спиральная пружина под действием подвешенного к ней груза растянулась на 6,5 см. Если груз оттянуть вниз, а затем отпустить, то он начнет колебаться вдоль вертикальной оси. Определите период таких колебаний.

4.13. Груз массой 0,2 кг, подвешенный на пружине жесткостью 20 Н/м, лежит на подставке так, что пружина не деформирована. Подставку убирают, и груз начинает двигаться. Найдите его максимальную скорость.

4.14. Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если медный шарик заменить на алюминиевый того же радиуса?

4.15. Шарик массой m подвешен с помощью двух пружин

жин, жесткости которых k_1 и k_2 (рис. 75). Найдите частоту колебаний шарика.

4.16. Два одинаковых небольших шарика, имеющих одинаковые заряды 400 нКл, соединены легкой пружиной и находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Шарiki колеблются так, что расстояние между ними меняется от 2 см до 8 см. Найдите жесткость пружины, если ее длина в свободном состоянии равна 4 см. Пружина не заряжена и электроизолирована от шариков.

4.17. В стеклянную U-образную трубочку налита ртуть так, что весь столбик ртути имеет длину 20 см. После заполнения трубочку слегка наклонили и возвратили в вертикальное положение, отчего ртуть начала колебаться. Найдите период колебаний.

4.18. Горизонтальная подставка совершает в вертикальном направлении гармонические колебания с амплитудой 0,5 м. Каким должен быть наименьший период колебаний, чтобы лежащий на подставке предмет не отделялся от нее?

4.19. Тело A массой 1 кг и тело B массой 4,1 кг соединены между собой пружиной (рис. 76). Тело A совершает свободные гармонические колебания в вертикальном направлении с амплитудой 1,6 см и циклической частотой $2,5 \text{ с}^{-1}$. Пренебрегая массой пружины, найдите наибольшую силу давления этих двух тел на опорную горизонтальную плоскость.

4.20. Тело массой m скользит по гладкому горизонтальному столу и растягивает пружину, с помощью которой оно крепится к стене (рис. 77). Найдите наибольшее ускорение тела, если его скорость при нерастянутой пружине была равна v_0 . Жесткость пружины k .



Рис. 75

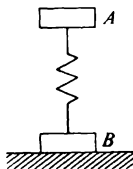


Рис. 76

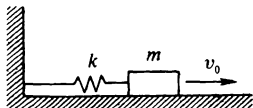


Рис. 77

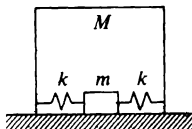


Рис. 78

4.21. Кабина массой M стоит на шероховатой горизонтальной поверхности с коэффициентом трения μ (рис. 78). Внутри кабины находится брусок массой m , прикрепленный к ней двумя пружинами жесткостью k каждая. При какой амплитуде колебаний бруска кабина сдвинется с места? Трение между бруском и кабиной отсутствует.

4.22. В некоторой среде распространяется волна. За время, в течение которого частица среды совершает 140 колебаний, волна распространяется на расстояние 110 м. Найдите длину волны.

4.23. Волны набегают на берег под углом 45° . Определите скорость перемещения гребня волны вдоль берега, если расстояние между гребнями волн 5 м, а частота вертикальных колебаний воды 0,25 Гц.

4.24. Звуковые волны из воздуха распространились в воду. Длина волны звука в воздухе 1 м. Какова длина волны звука в воде?

4.25. Из пункта A в пункт B дважды был послан звуковой сигнал частотой 50 Гц, причем во второй раз при температуре воздуха на 20 К выше, чем в первый. Число волн, укладывающихся на расстоянии от A до B , во второй раз оказалось, как и в первый, четным, но на две меньше. Определите расстояние между пунктами, если при повышении температуры воздуха на 1 К скорость звука увеличивается на 0,5 м/с. Скорость звука в первом опыте принять равной 330 м/с.

Электромагнитные колебания и волны

4.26. Через параллельно соединенные резистор сопротивлением 200 Ом и конденсатор емкостью 5 мкФ течет переменный ток с циклической частотой 10^3 с^{-1} (рис. 79). Первый амперметр показывает ток 1 А. Найдите показание второго амперметра. Оба амперметра предназначены для измерения переменного тока, сопротивление первого амперметра достаточно мало.

4.27. В сеть переменного тока с напряжением 220 В включена схема, состоящая из двух идеальных диодов и трех одинаковых резисторов сопротивлением 5 кОм каждый (рис. 80). Какая мощность выделяется на резисторах?

4.28. Конденсатор емкостью 200 мкФ включен в цепь переменного тока с частотой 60 Гц, а конденсатор емкостью 300 мкФ включен в цепь тока с частотой 50 Гц. Найдите отношение емкостных сопротивлений конденсаторов.

4.29. При включении первичной обмотки трансформатора в сеть переменного тока во вторичной обмотке возникает напряжение 30 В. При включении в эту же сеть вторичной обмотки на клеммах первичной возникает напряжение 120 В. Во сколько раз число витков первич-

ной обмотки больше числа витков вторичной обмотки трансформатора?

4.30. Ток в первичной обмотке трансформатора равен 0,5 А, напряжение на ее концах — 220 В. Во вторичной обмотке ток равен 11 А, напряжение — 9,5 В. Определите КПД трансформатора.

4.31. Зависимость силы тока от времени в колебательном контуре описывается уравнением $i = 0,1 \sin 300 \pi t$. Найдите индуктивность контура, если максимальная энергия электрического поля конденсатора равна 0,005 Дж.

4.32. Определите резонансную частоту контура, если максимальный заряд конденсатора равен 1 мкКл, а максимальный ток в контуре составляет 10 А.

4.33. Можно ли, имея конденсаторы емкостью 120 пФ и 156 пФ и катушку индуктивностью 125 мкГн, получить колебательный контур, настроенный на длину волны 350 м?

4.34. Электроемкость контура равна 300 пФ. Какой должна быть индуктивность контура, чтобы он резонировал на частоту электромагнитных колебаний 10^6 с^{-1} ?

4.35. Колебательный контур с конденсатором емкостью 1 мкФ настроен на частоту 400 Гц. Если параллельно этому конденсатору подключить второй конденсатор, то частота колебаний в контуре становится равной 200 Гц. Определите емкость второго конденсатора.

4.36. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью 10^{-3} Гн и конденсатора емкостью 10^{-5} Ф. Конденсатор заряжен до максимального напряжения 100 В. Определите максимальную силу тока в контуре при свободных колебаниях в нем.

4.37. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 1,2 нФ и катушки индуктивностью 6 мкГн и активным сопротивлением 0,5 Ом. Какую мощность дол-

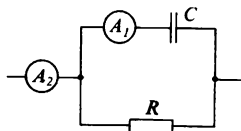


Рис. 79

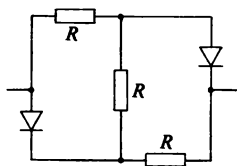


Рис. 80

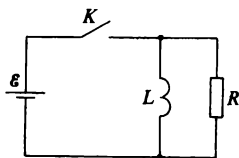


Рис. 81

жен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие гармонические колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе 10 В?

4.38. К источнику тока подключена катушка индуктивностью 0,8 Гн и резистор сопротивлением 25 Ом (рис. 81). Сразу после размыкания ключа K в резисторе выделяется тепловая мощность 100 Вт. Сопротивление обмотки катушки пренебрежимо мало. Какое количество теплоты выделится в резисторе к моменту прекращения тока в цепи?

4.39. Какова длина волны электромагнитного излучения колебательного контура, если конденсатор имеет емкость 2 пФ, скорость изменения силы тока в катушке индуктивности равна 4 А/с, а возникающая ЭДС индукции составляет 0,04 В?

4.40. На какую длину волны настроен колебательный контур, если он состоит из катушки индуктивностью $2 \cdot 10^{-3}$ Гн и плоского конденсатора? Расстояние между пластинами конденсатора 1 мм, площадь пластин 80 см², конденсатор заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью 11.

Глава 5

Оптика

5.1. На рисунке 82 показаны область полной видимости в плоском зеркале некоторого прямого предмета (заштрихована прямыми линиями) и области частичной видимости предмета в зеркале (заштрихованы волнистыми линиями). Определите расположение предмета.

5.2. Человек видит свое изображение в плоском зеркале. На какое расстояние нужно передвинуть зеркало, чтобы изображение сместилось на 1 м?

5.3. Плоское зеркало поворачивают на угол 35°. На какой угол повернется при этом отраженный от зеркала луч?

5.4. Отражающая поверхность зеркала составляет с плоскостью стола угол 135°. По направлению к зеркалу по столу катится шар со скоростью 2 м/с. В каком направлении и с какой скоростью движется изображение шара?

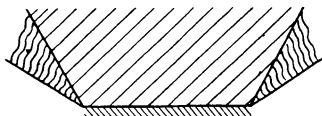


Рис. 82

5.5. У окна с двойными рамами стоит цветок. В окне видны два его изображения. На сколько удалены друг от друга эти изображения, если расстояние между стеклами рам 10 см?

5.6. Луч света падает на систему двух взаимно перпендикулярных зеркал (рис. 83). Угол падения луча на первое зеркало 17° . Отражаясь от первого зеркала, луч падает на второе. Определите угол отражения луча от второго зеркала.

5.7. Два плоских зеркала составляют двугранный угол 120° (рис. 84). В плоскости, делящей угол пополам, расположен точечный источник света S . Расстояние между первыми мнимыми изображениями источника равно H . Чему будет равно расстояние между изображениями, если двугранный угол уменьшить в два раза?

5.8. Луч света падает на границу раздела двух сред под углом 30° . Показатель преломления первой среды 2,4. Определите показатель преломления второй среды, если известен, что отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу.

5.9. Луч света выходит из скипидара в воздух. Предельный угол полного внутреннего отражения $42^\circ 23'$. Определите скорость распространения света в скипидаре.

5.10. Пучок параллельных лучей шириной 3 см падает под углом 45° из воздуха на плоскую границу среды с показателем преломления 1,5. Какова будет ширина пучка в среде?

5.11. В блоке оптического стекла с показателем преломления $\sqrt{3}$ имеется наполненная воздухом полость в виде плоскопараллельной пластинки толщиной 0,2 см. Луч света падает на границу раздела стекло — воздух под углом 30° . Определите смещение луча после прохождения через воздушную полость.

5.12. Сечение стеклянной призмы имеет форму равнобедренного треугольника. Луч света падает из воздуха на одну из граней призмы перпендикулярно ей. Найдите угол между лучом, выходящим из призмы, и продолжением луча, падающего на призму. Показатель преломления стекла принять равным 1,5.

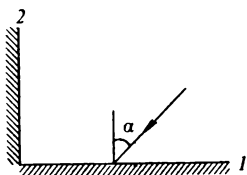


Рис. 83

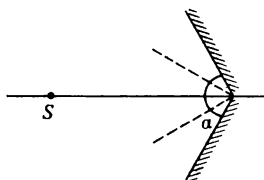


Рис. 84

5.13. Луч монохроматического света выходит из треугольной призмы под углом, равным углу падения на первую ее преломляющую грань. При этом угол отклонения луча от первоначального направления составляет 40° . Определите угол падения луча на призму, если ее преломляющий угол 60° .

5.14. В жидкости с показателем преломления 1,8 находится точечный источник света. На каком максимальном расстоянии от источника надо поместить диск диаметром 2 см, чтобы свет не вышел из жидкости в воздух? Плоскость диска параллельна поверхности жидкости.

5.15. Свая длиной 2 м выступает над поверхностью воды на 1 м. Определите длину тени от сваи на дне озера, если угол падения лучей света составляет 30° .

5.16. Под каким углом к горизонту следует расположить плоское зеркало, чтобы осветить дно колодца отраженными от зеркала солнечными лучами в то время, когда свет падает под углом 30° к горизонту?

5.17. На каком расстоянии от стеклянного шара радиусом R следует поместить точечный источник света, чтобы его изображение оказалось с другой стороны от шара на таком же расстоянии? Показатель преломления стекла n . Изображение создается узким пучком лучей, близких к оптической оси.

5.18. На дне бассейна, заполненного водой, лежит плоское зеркало. Человек смотрит вертикально вниз с бортика бассейна и видит отражение своего лица. На каком расстоянии от поверхности воды оно находится? Глубина бассейна 2 м, расстояние от лица человека до поверхности 2 м.

5.19. Луч света отражается от плоского зеркала, падая на него под углом 30° . На какое расстояние сместится отраженный от зеркала луч, если поверхность зеркала закрыть стеклом толщиной 3 см? Показатель преломления стекла 1,5.

5.20. Сечение стеклянной призмы имеет форму равнобедренного треугольника. Одна из граней посеребрена. Луч света падает нормально на другую непосеребренную грань и после двух отражений выходит через основание призмы перпендикулярно ему. Найдите углы призмы.

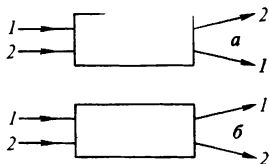


Рис. 85

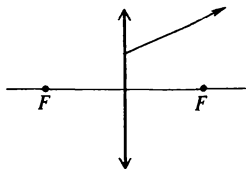


Рис. 86

5.21. В каком случае линза, находящаяся в ящике, будет собирающей и в каком — рассеивающей (рис 85)?

5.22. Постройте ход луча до собирающей линзы, если известны его ход после линзы и положения фокусов линзы (рис. 86).

5.23. Луч света падает на собирающую линзу и, преломившись в ней, идет так, что его продолжение проходит через главный фокус линзы. На каком расстоянии от линзы луч пересекает главную оптическую ось линзы, если ее фокусное расстояние F ?

5.24. При помощи собирающей линзы с фокусным расстоянием 6 см рассматривают монету диаметром 1,25 см. При этом получают мнимое изображение, диаметр которого 5 см. Найдите расстояния от монеты до линзы и от линзы до изображения монеты.

5.25. На пути сходящегося пучка поставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием 10 см, в результате чего лучи сошлись на расстоянии 5 см от линзы. Где пересекутся лучи, если линзу убрать?

5.26. На каком расстоянии перед рассеивающей линзой с оптической силой -3 дптр надо поставить предмет, чтобы его мнимое изображение получилось посередине между линзой и ее фокусом?

5.27. Светящаяся точка находится в фокусе рассеивающей линзы. Круговая диафрагма, расположенная вплотную к линзе, имеет отверстие диаметром d . Найдите диаметр светлого пятна на экране, установленном за линзой в ее фокальной плоскости.

5.28. На рассеивающую линзу падает сходящийся пучок лучей. После прохождения через линзу лучи пересекаются в точке на главной оптической оси, отстоящей от линзы на 15 см. Если линзу убрать, точка пересечения лучей переместится на 3 см ближе к линзе. Каково фокусное расстояние линзы?

5.29. Линза дает мнимое изображение предмета, увеличенное в два раза, если он находится от нее на расстоянии 5 см. Какая это линза — собирающая или рассеивающая? Чему равно ее фокусное расстояние?

5.30. Выведите формулу Ньютона, т. е. найдите соотношение между расстоянием x от источника до переднего фокуса линзы, расстоянием x' от изображения до заднего фокуса линзы и фокусным расстоянием линзы F . Найдите также увеличение, даваемое линзой с фокусным расстоянием 10 см, если $x = 2$ см.

5.31. На каком расстоянии от собирающей линзы надо поместить предмет, чтобы расстояние между предметом и его действительным изображением было минимальным? Фокусное расстояние линзы F .

5.32. Расстояние между источником света и экраном 1 м. Тонкая линза, помещенная между ними, дает четкое

изображение при двух положениях, расстояние между которыми 0,4 м. Определите фокусное расстояние линзы.

5.33. Постройте изображение предмета AB в собирающей линзе (рис. 87). Запишите для этого случая формулу линзы — с учетом правила знаков.

5.34. С помощью тонкой линзы получается увеличенное в два раза действительное изображение плоского предмета. Если предмет сместить на 1 см в сторону линзы, то изображение будет увеличенным в три раза. Чему равно фокусное расстояние линзы?

5.35. Светящаяся точка, находящаяся на расстоянии 15 см от собирающей линзы с фокусным расстоянием 10 см, движется со скоростью 2 см/с перпендикулярно оптической оси. С какой скоростью движется ее изображение?

5.36. Точечный источник света помещен на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием 8 см на расстоянии 12 см от линзы. Линза начинает смещаться в направлении, перпендикулярном своей главной оптической оси, со скоростью 1 см/с. С какой скоростью будет смещаться изображение источника, если сам источник остается неподвижным?

5.37. Действительное изображение предмета, полученное с помощью собирающей линзы, находится от нее на расстоянии 80 см. Если собирающую линзу заменить рассеивающей с таким же фокусным расстоянием, мнимое изображение предмета будет отстоять от линзы на 20 см. Найдите фокусное расстояние линз.

5.38. Фотограф хочет с боку снять финиш бега спортсменов. Расстояние от объектива фотоаппарата до ближайшего бегуна 10 м. Фокусное расстояние объектива 100 мм. Размытость контуров изображения на фотопленке не должна превышать 0,1 мм. Оцените время экспозиции, если спортсмены финишируют со скоростью 10 м/с.

5.39. Предмет размером 0,1 м надо спроецировать на экран. Какое фокусное расстояние должен иметь объектив, находящийся от экрана на расстоянии 4,2 м, чтобы изображение предмета на экране имело размер 2 м?

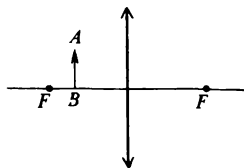


Рис. 87

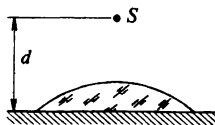


Рис. 88

5.40. Объектив телевизионного передатчика отбрасывает изображение свободно падающего предмета, находящегося перед ним на расстоянии 5 м, на светочувствительный слой передающей трубки. Определите фокусное расстояние объектива передатчика, если известно, что изображение движется с ускорением $0,2 \text{ м/с}^2$.

5.41. Две тонкие собирающие линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 расположены рядом. Найдите оптическую силу этой системы.

5.42. Пучок параллельных лучей проходит через две тонкие собирающие линзы, оставаясь параллельным. Расстояние между линзами равно 15 см. Определите фокусное расстояние первой линзы, если для второй линзы оно равно 9 см.

5.43. Оптическая система состоит из двух линз с фокусным расстоянием 30 см каждая, расположенных на расстоянии 15 см друг от друга. При каких положениях предмета система дает мнимое изображение?

5.44. В главном фокусе собирающей линзы с фокусным расстоянием F поместили рассеивающую линзу. Предмет находится по другую сторону от собирающей линзы на расстоянии $3F$ от нее. Найдите фокусное расстояние рассеивающей линзы, если данная система дает действительное и в два раза увеличенное изображение предмета.

5.45. Тонкая линза с фокусным расстоянием 40 см вплотную прилегает к плоскому зеркалу (рис. 88). На оптической оси линзы, на высоте 10 см от нее, находится светящаяся точка. Где находится изображение этой точки?

5.46. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием 30 см и плоского зеркала, находящегося на расстоянии 15 см от линзы. Определите положение изображения, даваемого этой системой, если предмет находится на расстоянии 15 см перед линзой.

5.47. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием 5 см на расстоянии 10 см от линзы. По другую сторону линзы находится плоское зеркало, расположенное под углом 30° к главной оптической оси. Зеркало пересекает ось на расстоянии 4 см от линзы. На каком расстоя-

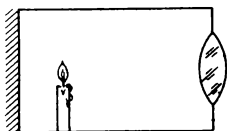


Рис. 89

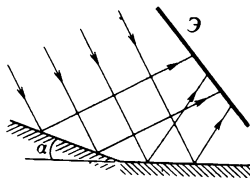


Рис. 90

нии от оси будет находиться изображение источника, даваемое такой оптической системой?

5.48. В светонепроницаемой коробке стоит зажженная свеча. Задняя стенка коробки — плоское зеркало, в переднюю вставлена линза (рис. 89). Длина коробки L . В этой системе наблюдают два изображения пламени свечи, причем размеры изображений одинаковы. Найдите фокусное расстояние линзы

5.49. На экран проецируют диапозитив, причем площадь изображения оказывается в 100 раз больше площади диапозитива. Расстояние от диапозитива до объектива проекционного аппарата 25 см. Определите расстояние от объектива до экрана и фокусное расстояние объектива.

5.50. У старой модели фотоаппарата минимальное расстояние от объектива до пленки равно фокусному расстоянию (40 мм), а максимальное — в 5 раз больше. Определите пределы фотографирования и максимальное увеличение.

5.51. Человек рассматривает зрачок своего глаза в плоском зеркале толщиной 1,5 см на расстоянии наилучшего зрения (25 см). На каком расстоянии от зеркала расположен глаз человека? Показатель преломления стекла 1,5.

5.52. Расстояние наилучшего видения для пожилого человека равно 60 см. Вычислите оптическую силу очков, способных обеспечить ему уменьшение этого расстояния до 20 см.

5.53. Вода освещена красным светом, для которого длина волны в воздухе равна 0,7 мкм. Какой будет длина волны в воде? Какой цвет увидит человек, открывший глаза под водой?

5.54. Между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками имеется небольшой воздушный зазор. Сквозь пластинки проходит луч монохроматического света, падающий нормально к поверхности пластин. При этом в воздушном зазоре укладывается 20 длин волн света. Сколько длин волн того же света уложится в этом зазоре, если его заполнить жидкостью с показателем преломления 1,3?

5.55. Объектив фотоаппарата покрыт слоем прозрачного диэлектрика толщиной 0,525 мкм. Обеспечит ли этот слой просветление объектива для зеленого света с длиной волны 546 нм, если показатель преломления диэлектрика 1,31?

5.56. Два плоских зеркала образуют двугранный угол за счет того, что одно зеркало относительно другого повернуто на небольшой угол α (рис. 90). На зеркало падает свет в виде плоской волны с длиной волны λ . На пути отраженных от зеркал волн поставлен экран, который расположен симметрично по отношению к отраженным

волнам. Чему равно расстояние между двумя соседними максимумами в интерференционной картине, наблюдаемой на экране?

5.57. В установке для демонстрации опыта Юнга по дифракции света расстояние между щелями $0,07$ мм, а расстояние от двойной щели до экрана 2 м. Прибор освещается зеленым светом с длиной волны $5 \cdot 10^{-5}$ см. На сколько нужно изменить длину волны источника, освещающего прибор, чтобы при помещении установки в воду расстояние между соседними светлыми дифракционными полосами осталось неизменным?

5.58. Собирающая линза с диаметром 5 см и фокусным расстоянием 50 см разрезана по диаметру пополам, и половинки раздвинуты на расстояние 5 мм. Точечный источник света расположен на оси симметрии системы на расстоянии 1 м от линзы. На каком расстоянии от линзы можно наблюдать интерференционную картину? Щель между половинками линзы закрыта.

5.59. Монохроматический свет падает перпендикулярно плоскости прозрачной дифракционной решетки. Под каким углом будет наблюдаться первый главный максимум зеленой линии спектра ртутной лампы (с длиной волны 546 нм), если период дифракционной решетки $1,1 \cdot 10^{-6}$ м?

5.60. На дифракционную решетку, имеющую период 6 мкм, нормально падает монохроматическая волна. Определите длину волны, если угол между дифракционными максимумами второго и третьего порядков равен 3° .

Глава 6

Квантовая физика

Световые кванты

6.1. Определите длину волны излучения, кванты которого имеют такую же энергию, что и электрон, прошедший разность потенциалов $4,1$ В.

6.2. Чему равна энергия фотона рентгеновского излучения с длиной волны $0,5 \cdot 10^{-3}$ нм?

6.3. В среде распространяется свет, имеющий длину волны $3 \cdot 10^{-5}$ см и энергию кванта $4,4 \cdot 10^{-19}$ Дж. Определите абсолютный показатель преломления среды.

6.4. Во сколько раз масса фотона, соответствующего инфракрасному свету с длиной волны 800 нм, меньше массы фотона, соответствующего ультрафиолетовому свету с частотой $1,5 \cdot 10^{15}$ Гц?

6.5. Монохроматический источник излучает зеленый

свет с длиной волны $5,3 \cdot 10^{-5}$ см. Определите число световых квантов, излучаемых источником в секунду, если он потребляет мощность 100 Вт, а его КПД равен 0,5 %.

6.6. Гелий-неоновый лазер, работающий в непрерывном режиме, дает излучение монохроматического света с длиной волны 630 нм, развивая мощность 40 мВт. Сколько фотонов излучает лазер за одну секунду?

6.7. Луч лазера мощностью 50 мВт падает на поглощающую поверхность. Оцените силу светового давления луча на эту поверхность.

6.8. Пучок лазерного излучения мощностью 100 Вт падает на непрозрачную пластинку под углом 30° . Пластинка поглощает 60 % падающей энергии, а остальную часть энергии зеркально отражает. Найдите величину силы, действующей на пластинку со стороны света.

6.9. Космический корабль, находящийся на околоземной орбите, раскрывает солнечный парус площадью 100 км^2 . Найдите максимальную силу давления солнечного излучения на идеально отражающий парус. Интенсивность солнечного излучения вблизи паруса равна $1,4 \text{ кВт/м}^2$.

6.10. Металлический шарик, отдаленный от других тел, облучают монохроматическим светом с длиной волны 2000 Å. Шарик, теряя фотоэлектроны, заряжается до максимального потенциала 3 В. Определите работу выхода электрона для материала шарика.

6.11. Какую максимальную скорость могут получить вырванные из калия электроны при облучении его светом с длиной волны $0,4 \text{ мкм}$?

6.12. Некоторый металл освещается светом с длиной волны $0,25 \text{ мкм}$. Пренебрегая импульсом фотона, найдите максимальный импульс, передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона, если красная граница фотоэффекта для этого металла $0,28 \text{ мкм}$.

6.13. На один из вольфрамовых электродов двухэлектродного стеклянного баллона падает пучок ультрафиолетовых лучей с длиной волны 10^{-7} м . Между электродами приложено тормозящее напряжение -10 В . На каком расстоянии от первого электрода скорость фотоэлектронов уменьшится до нуля, если расстояние между электродами 40 см ?

6.14. Пучок ультрафиолетовых лучей с длиной волны 10^{-7} м сообщает металлической поверхности мощность 10^{-6} Вт . Определите силу возникшего фототока, если фотоэффект вызывает 1 % падающих фотонов.

6.15. Квант с длиной волны λ вырывает с поверхности металла фотоэлектрон, который описывает в однородном магнитном поле с индукцией B окружность радиусом R . Найдите работу выхода электрона из металла.

6.16. При переходе из одного стационарного состояния в другое атом водорода излучает квант света с частотой $4,57 \cdot 10^{14}$ Гц. Определите энергию этого кванта (в электронвольтах).

6.17. Радиус орбиты электрона в модели атома Бора равен 5,3 нм. Какую работу надо совершить, чтобы ионизировать этот атом?

6.18. Определите, возможна ли ионизация невозбужденного атома водорода внешним электрическим полем с напряженностью 10^8 В/м.

6.19. Минимальная энергия электрона, необходимая для ионизации атома водорода, равна W_0 . Определите минимальные начальные энергии ионов водорода и гелия, необходимые для ионизации атома водорода. Считайте, что ионизация происходит в результате абсолютно неупругого удара.

6.20. При распаде пи-мезона, движущегося со скоростью $2 \cdot 10^8$ м/с, на два фотона зафиксированы фотоны, которые летят в противоположных направлениях. Определите отношение энергий этих фотонов.

6.21. Как изменится положение химического элемента в таблице Менделеева после альфа-распада его атомов? после бета-распада?

6.22. В цепочке радиоактивных превращений элемента с порядковым номером 92 и атомной массой 235 в элемент с номером 82 и массой 207 (урана в свинец) содержится несколько альфа- и бета-распадов. Сколько всего распадов в этой цепочке?

6.23. В периодической системе элементов рядом расположены три элемента. Условно назовем их a , b и c . Радиоактивный изотоп элемента a превращается в элемент b , а тот, в свою очередь, — в элемент c . Последний превращается в изотоп исходного элемента a . Какими процессами обусловлены все эти переходы?

6.24. При взаимодействии ядер алюминия $^{27}_{13}\text{Al}$ с α -частицами образуются ядра изотопа магния $^{27}_{12}\text{Mg}$ и γ -частицы. При взаимодействии же γ -частиц с ядрами алюминия $^{27}_{13}\text{Al}$ образуются ядра изотопа магния $^{24}_{12}\text{Mg}$ и z -частицы. Какие широко известные частицы x , y , z участвуют в этих ядерных реакциях?

6.25. Определите период полураспада радона, если за 1 сутки их 10^6 атомов распадается 175 000 атомов.

6.26. Период полураспада одного из радиоактивных изотопов иода составляет 8 суток. Через какое время число атомов этого вещества окажется в 100 раз меньшим по сравнению с их начальным числом?

6.27. В микрокалориметр с теплоемкостью 1000 Дж/К помещено 100 мг изотопа кобальта (атомная масса 61). При распаде одного ядра кобальта выделяется энергия $2 \cdot 10^{-19}$ Дж. Через 50 мин температура калориметра повысилась на 0,06 К. Найдите период полураспада изотопа кобальта

6.28. Азот $^{14}_7\text{N}$ облучался в течение 1 часа пучком альфа-частиц. Найдите количество атомов образовавшегося изотопа $^{17}_8\text{O}$, если ток в пучке $2 \cdot 10^{-4}$ А и ядерную реакцию превращения азота в кислород вызывает одна альфа-частица из каждых 10^5 частиц в пучке.

6.29. При захвате ядром урана $^{235}_{92}\text{U}$ нейтрона происходит деление этого ядра на два осколка. Одним из осколков является ядро стронция $^{94}_{38}\text{Sr}$. Определите количество протонов в ядре второго осколка

6.30. При единичном акте деления ядра урана выделяется энергия 200 МэВ. За какой промежуток времени первоначальная загрузка урана $^{235}_{92}\text{U}$ в реакторе, равная 10 кг, уменьшится на 2 %? Мощность реактора постоянна и равна 1 МВт.

6.31. Удельная энергия связи ядра гелия равна 7 МэВ. Найдите минимальную энергию гамма-кванта, способного разделить это ядро на четыре свободных нуклона.

6.32. В ядерной реакции синтеза двух ядер дейтерия образуется медленно движущаяся (по сравнению со скоростью света) альфа-частица и квант света с энергией 19,7 МэВ. Пренебрегая скоростями вступающих в реакцию ядер, найдите скорость образовавшейся альфа-частицы.

6.33. Реакцию синтеза дейтерия и трития изучают, направляя ускоренные до энергии 2 МэВ ионы дейтерия на тритиевую мишень. Детектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно направлению пучка дейтронов. Определите энергию этих нейтронов, если в реакции выделяется энергия 17,6 МэВ.

6.34. При термоядерной реакции слияния дейтерия и трития образуется нейтрон и неизвестная частица и при этом выделяется 17,6 МэВ энергии. Определите неизвестную частицу и полную энергию, которая выделится, если прореагирует 1 г дейтерия.

6.35. Термоядерная реакция $^2_1\text{H} + ^3_2\text{He} \rightarrow ^4_2\text{He} + ^1_1\text{p}$ идет с выделением энергии 18,4 МэВ (кинетическая энергия образовавшихся частиц на эту величину больше кинетической энергии исходных). Какая энергия выделяется в реакции $^3_2\text{He} + ^3_2\text{He} \rightarrow ^4_2\text{He} + 2^1_1\text{p}$, если дефект масс ядра ^3_2He на 0,006 а. е. м. больше, чем у ядра ^2_1H ?

МАТЕРИАЛЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ 1992 года

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$7 \cos \left[x + \frac{\pi}{3} \right] + \left| \cos \left[x + \frac{\pi}{6} \right] \right| = 1.$$

2. Диагонали четырехугольника $PQRS$, вписанного в окружность, пересекаются в точке D . На прямой PR взята точка A , причем $\angle SAD = 50^\circ$, $\angle PQS = 70^\circ$, $\angle RQS = 60^\circ$. Где расположена точка A : на диагонали PR или на ее продолжении? Ответ обоснуйте.

3. Даны числа p и q такие, что $p = \log_z y$, $q = \log_x y$.
Найдите число

$$\log \left[\frac{xz}{y^2} \right]_3^{\sqrt{xyz}},$$

считая, что оно определено.

4. Один рабочий на новом станке производит за 1 час целое число деталей, большее 8, а на старом станке — на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет дневную норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма?

5. На прямой p в пространстве последовательно расположены точки A , B и C такие, что $AB = 27$ и $BC = 18$. Найдите расстояние между прямыми p и q , если расстояния от точек A , B и C до прямой q равны 17, 10 и 8 соответственно.

6. Найдите все значения x , при каждом из которых неравенство

$$(2 - a)x^3 + (1 - 2a)x^2 - 6x + (5 + 4a - a^2) < 0$$

выполняется хотя бы при одном значении a , принадлежащем отрезку $[-1; 2]$.

В а р и а н т 2

(факультет вычислительной математики
и кибернетики)

1. Какое из двух чисел

$$\sqrt[3]{\frac{1990}{1991}} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{\frac{1991}{1992}}$$

больше?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \cos 4x} \sin x = 2 \sin \frac{\pi}{4}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2 (11 - x) + \log_2 (x + 1) \leq \log_2 ((x + 1)(x^2 + 5x - 5)).$$

4. Из города A в город B выехал автомобиль. Спустя некоторое время из B в A по той же дороге выехал мотоцикл. Скорости автомобиля и мотоцикла на всем пути постоянны. Автомобиль до встречи с мотоциклом находился в пути 7 часов 30 минут, а мотоцикл до встречи ехал 3 часа. Мотоцикл прибыл в A в 23 часа, а автомобиль прибыл в B в 16 часов 30 минут. Найдите время отправления мотоцикла из города B .

5. Две окружности пересекаются в точках A и K . Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK . Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB , касается одной окружности в точке A . Прямая, содержащая отрезок AC , касается другой окружности также в точке A . Длина отрезка BK равна 1, длина отрезка CK равна 4, а тангенс угла CAB равен $1/\sqrt{15}$. Найдите площадь треугольника ABC .

6. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство
$$\frac{4}{3}(x^2 - ax) - \frac{\pi}{3} < \sin(x^2 - ax) + \cos \left[2x^2 - 2ax + \frac{\pi}{4} \right]$$
 выполняется для всех x из отрезка $[\pi; 2\pi]$.

В а р и а н т 3

(физический факультет)

1. Решите неравенство

$$1 - 2x^2 > 2x.$$

2. Решите уравнение

$$5 - 3 \cos 2x = 8 \sin x.$$

3. Решите уравнение

$$2 \log_2 x^3 - 1 = \frac{1}{2} \log_2 x.$$

4. Площадь треугольника ABC равна S , $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$. Найдите BC .

5. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, если известно, что пятый и девятый члены дают в сумме 40, а сумма седьмого и тринадцатого членов равна 58.

6. Через центр окружности, описанной около треугольника ABC , проведены прямые, перпендикулярные сторонам AC и BC . Эти прямые пересекают высоту CH треугольника или ее продолжение в точках P и Q . Известно, что $CP = p$, $CQ = q$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

7. Известно, что некоторая нечетная функция при $x > 0$ определяется формулой $f(x) = \log_3 (x/3)$. Найдите, какой формулой определяется функция $f(x)$ при $x < 0$. Решите уравнение $f(x) = 3$.

8. Три шара с радиусами R касаются друг друга и каждый из них касается боковой поверхности конуса. Центры шаров находятся вне конуса. Высота конуса перпендикулярна плоскости α , содержащей центры шаров. Угол между высотой конуса и его образующей равен φ . Найдите расстояние от вершины конуса до плоскости α .

В а р и а н т 4

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$x + 1 + \log_{1/3} (-2 + 3^{-x}) = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{2 \sin x} < 1.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ угол BCD равен 150° , а основание AD равно 8. Найдите радиус окружности, касающейся прямой CD , проходящей через вершину A и пересекающей основание AD на расстоянии 2 от точки D .

4. Даны три сплава. Состав первого сплава: 55 % хрома и 45 % никеля, второго — 60 % никеля, 25 % хрома и 15 % кобальта; третьего — 70 % хрома и 30 % кобальта. Из них нужно приготовить новый сплав, содержащий 20 % кобальта. Какие значения может принимать процент-

ное содержание никеля в этом новом сплаве?

5. Найдите все значения параметра k , при которых уравнение

$$2x - |x - k^2| = 11k - 3|x + 4k|$$

а) не имеет решений, б) имеет конечное непустое множество решений.

В а р и а н т 5

(биологический факультет)

1. Найдите все решения уравнения

$$4 \cos^2 \left[6x + \frac{\pi}{6} \right] = 1.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2 \left[\frac{x-9}{x-4} \right] + \log_2 (x^2 - 14x + 40) = 2 + \log_2 3.$$

3. Дана окружность, диаметр MN которой равен 16. На касательной к этой окружности в точке M отложен отрезок MP , длина которого больше, чем 15. Из точки P проведена вторая касательная к окружности, пересекающая прямую MN в точке Q . Найдите площадь треугольника MPQ , если его периметр равен 72.

4. Найдите все пары целых чисел p, q , удовлетворяющие одновременно двум неравенствам:

$$\begin{cases} p^2 + q^2 < 18p - 20q - 166, \\ 32p - q^2 > p^2 + 12q + 271. \end{cases}$$

5. Найдите наименьшее значение величины

$$\frac{1}{r} \left[\frac{4p}{u} + \frac{q}{\sqrt{1-v^2}} \right],$$

где p, q, r, u, v — положительные числа, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{cases} pv + q\sqrt{1-u^2} \leq r, \\ p^2 + 2qr\sqrt{1-u^2} \geq q^2 + r^2, \\ 2qr\sqrt{1-u^2} + q^2 \frac{1-v^2-u^2}{v^2-1} \geq r^2. \end{cases}$$

В а р и а н т 6
(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$2(\cos 6x + \sin 2x \cos 4x) = \sin 6x + \sin 2x$$

2. Самолет, осуществляя полет по заданному маршруту, может лететь в метеоусловиях *A*, *B* или *B* с одной и той же скоростью, но по-разному расходуя горючее. В первый раз самолет находился в метеоусловиях *A* половину полетного времени, в метеоусловиях *B* — треть времени, в метеоусловиях *B* — 1/6 полетного времени. Во второй раз он находился четверть времени в метеоусловиях *A* и 3/4 — в метеоусловиях *B*. В третий раз — по четверти полетного времени в метеоусловиях *A* и *B*, а половину времени — в метеоусловиях *B*. На сколько процентов израсходует самолет полетный норматив горючего, двигаясь весь путь в метеоусловиях *B*, если в первый раз он израсходовал его на $101\frac{2}{3}\%$, во второй — на 92,5 %, а в третий — на 97,5 %?

3. Решите уравнение

$$\frac{9^x - 82 \cdot 3^x + 162 - 3^{\frac{x}{2} + 2}}{3^{\frac{x}{2}} - 9} = -9.$$

4. Две окружности с центрами O_1 и O_2 , лежащими на стороне *MN* треугольника *MPN*, касаются друг друга извне и пересекают стороны *MP* и *PN* в точках *M*, *D* и *N*, *C* соответственно, причем $MO_1 = O_1D = 3$ и $NO_2 = CO_2 = 6$. Найдите площадь треугольника *MNP*, если известно, что отношение площади треугольника

*MCO*₂ к площади треугольника *O*₁*DN* равно $\frac{8}{5}\sqrt{3}$ и

$$PN = MP\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

5. Найдите все значения параметра *a*, при которых все числа *x* из отрезка [1; 5] удовлетворяют неравенству

$$3ax + 2\sqrt{3x + 1} - 6x + a - 5 < 0.$$

В а р и а н т 7
(геологический факультет)

1. Пятый член арифметической прогрессии равен 22, а сумма седьмого и девятого равна 32. Найдите сумму первых двадцати трех членов этой арифметической прогрессии.

2. Решите неравенство

$$\sqrt{6x + 5} - 3x \leq 2.$$

3. Решите уравнение

$$|3 \log_x x^4 + 7 \log_7 2 \cdot \log_2 x^2| = -\log_x 49$$

4. Решите уравнение

$$\cos x \cos 3x - 9 \cos^2 x + 5 = 14 \sin x \sin 3x - 30 \sin^2 x.$$

5. В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, $AD = 7$, $BC = 3$, $\angle BCD = 120^\circ$. Хорда BM окружности пересекает отрезок AD в точке N такой, что $ND = 2$. Найдите площадь треугольника BOM .

6. Найдите все тройки чисел (x, y, z) , удовлетворяющие уравнению

$$x^2 + 1 - 2x \sin \pi y + \sqrt{yz - 2z^2 - 64} = \\ = (41 - yz)(\cos 2\pi y + \cos \pi z)^2.$$

В а р и а н т 8

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 2x + 4 \cos x + 3 = 0.$$

2. Найдите три числа a , b и c , если известно, что их сумма равна 2, а квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имеет единственное решение $x = 2$.

3. Решите неравенство

$$(\log_x 9 - 1) \log_3 (9x) \leq 3.$$

4. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F . Известно, что площадь треугольника DEF равна 5. Найдите площадь треугольника ABC .

5. Найдите все значения параметра c , при которых уравнение

$$|x^2 - 2x| + |x^2 - 3x + 2| = x^2 - 4x + c$$

имеет ровно три различных решения.

В а р и а н т 9

(экономический факультет)

1. Вычислите

$$\log_{11/25} |\sin 3\beta| + \log_{11/25} |\sin \beta|,$$

если

$$\sin \left[\beta - \frac{\pi}{4} \right] + \cos \left[\beta - \frac{\pi}{4} \right] = \sqrt{2/5}.$$

2. Решите неравенство

$$(2 + 3^{x-5} - 3^{5-x})^{-1}(x^2 - 7x + 10)\sqrt{x+1} \geq 0.$$

3. Цех получил заказ на изготовление 5000 деталей первого типа и 3000 деталей второго типа. Каждый из 187 рабочих цеха затрачивает на изготовление 2 деталей первого типа время, за которое он мог бы изготовить 3 детали второго типа. Каким образом следует разделить рабочих цеха на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время; при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно, и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

4. В треугольной пирамиде $KLMN$ плоские углы LKN и MKN при вершине K равны $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$ соответственно. Угол между гранями LKM и MKN равен $\frac{\pi}{2}$. Определите плоский угол LKM .

5. Продолжения сторон KN и LM выпуклого четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке P , а продолжения сторон KL и MN — в точке Q . Отрезок PQ перпендикулярен биссектрисе угла KQN . Найдите длину стороны MN , если $KQ = 6$, $NQ = 4$, а площади треугольника LQM и четырехугольника $KLMN$ равны.

6. Найдите все значения параметра b , при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2 + 3x + 3|x + b| - b \leq 0$ максимально.

В а р и а н т 10

(факультет психологии)

1. Решите неравенство

$$\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \leq \frac{\sin x - 3}{\sqrt{2}}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 400 \cdot 5^y \cdot 50^x \cdot 100^{x+y} = 1, \\ \log_{0,5} + 0,4y (8^{-x} \cdot 4^{-y} + 25^{-2x} \cdot 125^{-y}) \times \\ \times \log_{41} (0,5x + 0,4y) = 1. \end{cases}$$

3. Трапеции $ABCD$ и $ACDE$ с равными большими основаниями, соответственно AD и AC , вписаны в одну окружность. Чему равен радиус этой окружности, если площадь треугольника ADE равна $1 + \sqrt{3}$, а угол COD равен 60° , где O — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$?

4. Найдите все значения параметров u , v , при которых существуют два различных корня уравнения

$$x(x^2 + x - 8) = u,$$

являющихся одновременно корнями уравнения

$$x(x^2 - 6) = v.$$

5. В тетраэдре $PQRS$ соединены отрезками следующие пары точек: точка F на ребре PQ с точкой G на ребре RS , точка O на ребре QS с точкой N на ребре PR , а также точки X , Y — середины ребер PS и QR соответственно. Отрезки FG , ON , XY пересекаются в одной точке. Определите площадь четырехугольника $FOGN$, если $PS = QR = PQ = 5$, $PF = 3$, а угол между скрещивающимися прямыми PS и QR равен 60° .

В а р и а н т 11 (филологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\frac{(\sqrt{3} \sin x - \cos x)^2}{2 \sin 2x - \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_x(x^2 - x^3 + 21x) \geq 3.$$

3. Точка C лежит на стороне MN ромба $KLMN$, причем $CN = 2CM$ и угол MNK равен 120° . Найдите отношение косинусов углов CKN и CLM .

4. Расстояние между портами P и Q равно 120 км. Из P в Q вышел теплоход, а спустя 1 час — катер, скорость которого равна 45 км/ч. Катер догнал теплоход в точке R и повернул обратно. Когда теплоход прибыл в Q , катер прошел $\frac{1}{2}$ пути от R к P . Найдите скорость теплохода.

5. Найдите все значения параметра b , при которых система уравнений

$$\begin{cases} bx^2 + 2bx + y + 3b - 3 = 0, \\ by^2 + x - 6by + 11b + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

1. Решите уравнение

$$2^{x+5} + 2^3 \cdot 2^{x-1} - 2^2 = 0.$$

2. Решите уравнение

$$3 \sin^2 x - 3 \cos 2x - 12 \sin x + 7 = 0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{|x - 5| - 1}{2|x - 6| - 4} \leq 1$$

4. Дан треугольник со сторонами 4; 8; 9. Найдите длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.

5. Решите неравенство

$$\log_{1/2} |\cos x| \log_5 (x^2 - 9) < 0.$$

6. При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения

$$x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a + 3 = 0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма?

Ф И З И К А*Задачи устного экзамена***Физический факультет**

1. На горизонтальной плоскости стоят два кубика одинаковых размеров, имеющие массы m_1 и m_2 . Коэффициенты трения кубиков о плоскость μ_1 и μ_2 . К первому

кубику прикладывают силу \vec{F} , линия действия которой проходит через центры обоих кубиков перпендикулярно боковым граням. Кубики скреплены легкой недеформированной (в исходном состоянии) пружиной, ось которой

совпадает с линией действия силы \vec{F} . При какой величине этой силы второй кубик сдвинется с места?

2. В вертикальную стенку на одной высоте и на расстоянии $2l$ друг от друга вбиты два гвоздя, через которые перекинута тонкая невесомая нерастяжимая нить. К концам нити и ее середине прикреплены грузы одной и той же массы (средний груз находится на одинаковых расстояниях от гвоздей). Вначале грузы удерживаются так, что средняя часть нити горизонтальна, затем грузы отпускают без начальной скорости. Какую скорость будет иметь средний груз, проходя положение равновесия? Трение не учитывайте.

3. На наклонной плоскости с углом α находится кубик (рис. 1). К кубику прикреплена невесомая пружина, другой конец которой закреплен в неподвижной точке A . В исходном состоянии кубик удерживается в положении, при котором пружина не деформирована. Кубик отпускают без начальной скорости. Определите максимальную скорость кубика в процессе движения. Масса кубика m , жесткость пружины k , коэффициент трения кубика о наклонную плоскость μ ($\mu < \tan \alpha$).

4. В неподвижной горизонтальной трубе, внутренний радиус которой R , катается без проскальзывания вблизи положения равновесия отрезок тонкостенной трубы радиусом $r \ll R$. Оси труб параллельны. Найдите период колебаний с малой амплитудой.

5. Цикл бензинового двигателя внутреннего сгорания близок к циклу Отто, состоящему из двух адиабат и двух изохор. Вначале горючую смесь, которую можно считать идеальным газом, сжимают без теплообмена с окружающей средой, потом изохорически нагревают (при сгорании топлива) на 500 К , затем снова без теплообмена газ расширяется, совершая работу, и наконец, после изохорического охлаждения на 250 К газ возвращается к исходному состоянию. Найдите КПД этого цикла. Теплоемкость газа в обоих изохорических процессах считайте одинаковой.

6. Кольцо прямоугольного сечения сделано из однородного плохо проводящего материала с удельным сопротивлением ρ . Кольцо помещено в область с однородным магнитным полем, перпендикулярным плоскости кольца, причем индукция поля линейно возрастает со временем по закону $B = At$ ($A = \text{const}$). Найдите зависимость плотности индукционного тока от расстояния R до оси кольца.

7. Медное кольцо радиусом r соединено проводящими спицами с центром (рис. 2). Через скользящие контакты к кольцу подключен резистор сопротивлением R . На кольцо намотана невесомая нить, к концу которой прикреплен груз массой m . Пренебрегая трением, определите установившуюся скорость груза, если кольцо пронизывается

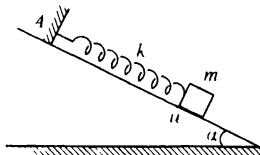


Рис. 1

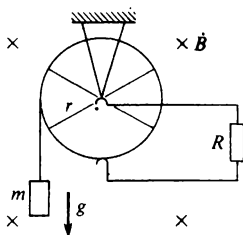


Рис. 2

внешним магнитным полем, индукция B которого перпендикулярна плоскости кольца.

8. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника, ЭДС которого \mathcal{E}_0 , конденсатора емкостью C , катушки индуктивности с малым омическим сопротивлением и ключа. Вначале ключ разомкнут, а конденсатор не заряжен. Затем ключ замыкают. Какое количество теплоты выделится на омическом сопротивлении за то время, когда электрические колебания в цепи полностью затухнут? Внутренним сопротивлением источника и проводов можно пренебречь.

9. Наблюдатель, перемещаясь по вертикали, определяет углы, образованные с вертикалью лучами, исходящими от малого объекта, находящегося на дне озера. На высотах h_1 и h_2 от уровня воды в озере он определил углы α_1 и α_2 соответственно. Какова глубина озера? Показатель преломления воды n .

10. Плоская монохроматическая волна нормально падает на экран с двумя параллельными щелями, расстояние между которыми 2,5 мм (рис. 3). Интерференционная картина наблюдается на другом экране, расположенном на расстоянии 5 м от плоскости щелей. На этом экране в точках O_1 и O_2 наблюдаются светлые интерференционные полосы. На какое минимальное расстояние вдоль оси системы нужно сместить экран, чтобы в точках O_1 и O_2 наблюдались темные полосы?

Механико-математический факультет

1. Катер, движущийся со скоростью 30 км/ч, буксирует спортсмена на водных лыжах (рис. 4). Трос, за который держится спортсмен, составляет с направлением движения катера угол 150° . Направление движения спортсмена образует с тросом угол 60° . Чему равна скорость спортсмена (v_2) в этот момент времени?

2. С вершины холма бросили камень под углом к горизонту со скоростью 10 м/с. В момент падения камня на склон холма угол между направлением скорости камня и горизонтом составил 60° , а разность высот точек бросания и падения — 5 м. Найдите угол между направлением начальной скорости камня и горизонтом.

3. Два одинаковых маленьких шарика соединены жест-

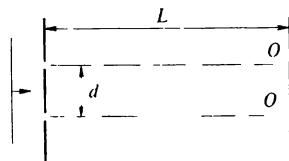


Рис. 3

ким стержнем длиной 60 см. Стержень стоит вертикально вплотную к вертикальной плоскости (рис. 5). При смещении нижнего шарика вправо на малое расстояние система приходит в движение в плоскости рисунка. Найдите скорость нижнего шарика (v) в момент времени, когда верхний шарик находится на высоте 40 см над горизонтальной плоскостью. Считайте, что при движении шарики не отрываются от плоскостей, трением можно пренебречь.

4. Объем тонкостенного цилиндрического сосуда высотой 40 см равен 400 см^3 , его вес $3,5 \text{ Н}$. При температуре 47°C и атмосферном давлении 100 кПа сосуд переворачивают вверх дном и погружают в жидкость плотностью 1000 кг/м^3 . При какой температуре сосуд утонет? Атмосферное давление считайте неизменным.

5. В вертикальном закрытом цилиндре находится идеальный газ, разделенный на две части тяжелым поршнем, который может перемещаться без трения. В нижней части цилиндра масса газа вдвое больше, чем в верхней. При температуре T , одинаковой во всем цилиндре, объем нижней части цилиндра равен объему верхней части. Каким будет отношение объемов, если температуру газа увеличить в 2 раза?

6. В цилиндрическом сосуде 1 под поршнем массой 5 кг находится одноатомный идеальный газ (рис. 6). Сосуд 1 соединен трубкой, снабженной краном, с таким же сосудом 2, в котором под поршнем массой 10 кг находится такой же газ. Сосуды и трубка теплоизолированы. В начальном состоянии кран K закрыт, температура газа в обоих сосудах одинакова, поршень в сосуде 2 расположен на высоте 10 см от дна. На какое расстояние передвинется поршень в сосуде 1 после открывания крана? Объемом трубки с краном можно пренебречь, атмосферное давление не учитывайте.

7. Если вольтметр, имеющий конечное сопротивление, подключен параллельно резистору сопротивлением R_1 , то он показывает напряжение 6 В, если параллельно резистору сопротивлением R_2 , то 4 В (рис. 7). Каковы будут напряжения на резисторах, если вольтметр не подключать?

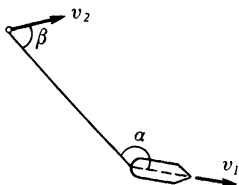


Рис. 4

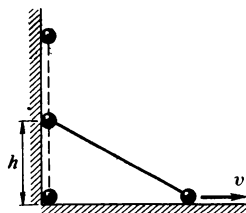


Рис. 5

ЭДС батареи 12 В, ее внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.

8. Два одинаковых гальванических элемента с внутренними сопротивлениями 0,2 Ом каждый соединены параллельно и нагружены на внешнее сопротивление R (рис. 8). Если эти элементы соединить последовательно, то мощность, выделяющаяся в том же сопротивлении нагрузки, возрастет в 2,25 раза. Чему равно сопротивление нагрузки R ?

9. На рисунке 9 представлены светящаяся точка S и ее изображение S_1 , даваемое линзой, главная оптическая ось которой — прямая OO_1 . Расстояния от точек S и S_1 до оптической оси равны соответственно 20 см и 30 см, расстояние между точками A и B равно 15 см. Найдите фокусное расстояние линзы.

10. Отрезок AB , лежащий на главной оптической оси линзы за ее фокусом F , сместили параллельно самому себе и перпендикулярно оптической оси в положение $A'B'$, как показано на рисунке 10. Чему равна величина смещения (d), если длина изображения отрезка $A'B'$ больше длины изображения отрезка AB в 2 раза? Фокусное расстояние линзы 3 см.

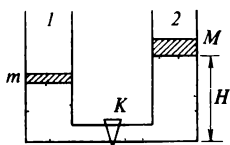


Рис. 6

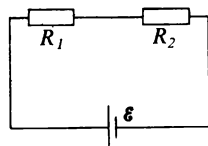


Рис. 7

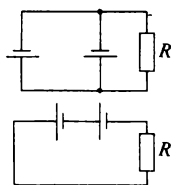


Рис. 8

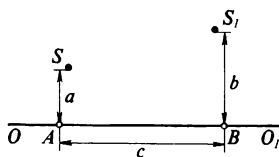


Рис. 9

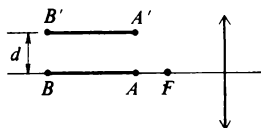


Рис. 10

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Самолет летит по дуге окружности радиусом 1 км, сохраняя одну и ту же высоту 1,5 км. С интервалом времени 10,5 с ($\approx 10\pi/3$ с) с него сбрасывают два мешка. На каком расстоянии друг от друга упадут эти мешки на землю, если скорость самолета 100 м/с? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

2. При торможении от скорости 40 км/ч до полной остановки автомобиль прошел путь 16 м. Какой путь пройдет этот автомобиль на той же дороге при снижении скорости от 100 км/ч до 60 км/ч? Считайте, что ускорение при торможении постоянно и одинаково в обоих случаях.

3. Брусек массой 1 кг покоится на горизонтальной шероховатой поверхности (рис. 11). К нему прикреплена пружина жесткостью 20 Н/м. Какую работу нужно совершить для того, чтобы сдвинуть с места брусок, растягивая пружину в горизонтальном направлении, если коэффициент трения между бруском и поверхностью 0,2?

4. Человек массой 70 кг, неподвижно стоявший на коньках, бросил вперед в горизонтальном направлении снежный ком массой 3,5 кг. Какую работу совершил человек при броске, если после броска он откатился назад на расстояние 0,2 м? Коэффициент трения коньков о лед 0,01

5. Легкую сферу массой 80 г взвешивают в воздухе. При температуре воздуха 47°C вес сферы оказался равным 0,1 Н. При какой температуре воздуха сфера перестанет давить на чашку весов? Изменением объема сферы можно пренебречь, давление воздуха считайте неизменным.

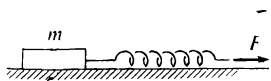


Рис. 11

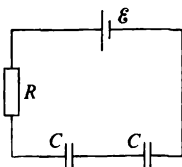


Рис. 12

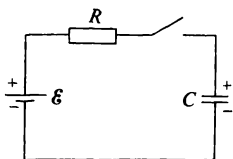


Рис. 13

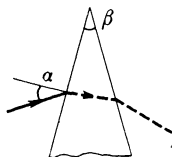


Рис. 14

6. Некоторое количество воды нагревается электронагревателем мощностью 500 Вт. При включении нагревателя на время 2 мин температура воды повысилась на 1 К, а при его отключении — понизилась за время 1 мин на ту же величину 1 К. Какова масса нагреваемой воды, если потери тепла за счет рассеяния в окружающую среду пропорциональны времени?

7. В схеме, показанной на рисунке 12, ЭДС источника равна 60 В, емкость каждого конденсатора 10 мкФ. Какой заряд протекает в цепи, если один из конденсаторов заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью 2?

8. Конденсатор емкостью 10 мкФ, предварительно заряженный до напряжения 100 В, подключают через резистор к батарее с ЭДС 300 В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением (рис. 13). Какое количество теплоты выделится в резисторе за время полной зарядки конденсатора?

9. Высота Солнца над горизонтом составляет угол 10° . Пользуясь зеркалом, пускают «зайчик» в водоем. Под каким углом к горизонту нужно расположить зеркало, чтобы луч света шел в воде под углом 41° к вертикали? Считайте, что нормаль к зеркалу лежит в вертикальной плоскости.

10. Луч света, идущий в плоскости рисунка 14, падает на переднюю грань стеклянного клина с углом 45° между гранями. При каких значениях угла падения (α) луч выйдет через вторую грань клина? Показатель преломления стекла равен $\sqrt{2}$.

Химический факультет

1. Тело массой 100 г падает с высоты 5 м на чашу пружинных весов (рис. 15) и сжимает пружину жесткостью 10^3 Н/м на величину x . Определите x , если массы чаши и пружины весов пренебрежимо малы.

2. В цилиндрическом сосуде с несмешивающейся с водой жидкостью, плотность которой $1,2$ г/см³, при темпе-

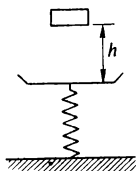


Рис. 15

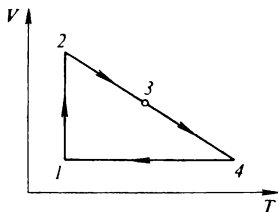


Рис. 16

ратуре 0°C плавает льдинка массой 1 кг . На какую величину изменится уровень этой жидкости в сосуде, когда льдинка растает? Площадь основания сосуда 10^{-1} м^2 .

3. Пластилиновый шар бросают на вертикальную стену, находящуюся на расстоянии 5 м от точки бросания, с начальной скоростью 10 м/с под углом 45° к горизонту. Шар прилипает к стене. Считая, что вся кинетическая энергия шара пошла на его нагревание, найдите изменение его температуры. Удельная теплоемкость пластилина $2,5 \cdot 10^3\text{ Дж/(кг}\cdot\text{К)}$.

4. Детский воздушный шарик, надутый гелием, удерживается привязанной к нему нитью. Радиус шарика 15 см , масса его оболочки $7,5\text{ г}$, масса гелия в нем $2,5\text{ г}$, атмосферное давление 10^5 Па , температура воздуха 300 К . Найдите силу натяжения нити.

5. Идеальный газ совершает круговой процесс $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ (рис. 16). Отдельные участки процесса представляют собой отрезки прямых. Известно, что $V_1 = 1\text{ м}^3$, $V_2 = 4\text{ м}^3$, $T_1 = 100\text{ К}$, $T_4 = 300\text{ К}$. Какой объем занимал газ в состоянии 3, находящемся на участке $2 \rightarrow 4$, которое характеризовалось тем же давлением, что и начальное состояние 1?

6. Источник постоянного тока с ЭДС 10 В и внутренним сопротивлением 10 Ом замыкают через резистор сопротивлением 90 Ом на незаряженный конденсатор емкостью 2 мкФ . Какое количество теплоты выделится на внешнем резисторе к моменту полного заряда конденсатора?

7. Вакуумный диод, у которого анод и катод представляют собой параллельные пластины, работает в режиме, когда между током I и напряжением U выполняется соотношение $I = AU^{3/2}$. Во сколько раз увеличится средняя сила, действующая на анод со стороны подлетающих к нему электронов, если напряжение на диоде увеличить в 2 раза? Начальной скоростью электронов, вылетающих с катода, можно пренебречь. Удары электронов об анод считайте неупругими.

8. Проволочное кольцо радиусом $0,1\text{ м}$ лежит на столе. Какой заряд протечет по кольцу, если его перевернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца 1 Ом , вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $0,5 \cdot 10^{-4}\text{ Тл}$.

9. Сейсмическая упругая волна с частотой $0,5\text{ Гц}$ и длиной волны $2,9\text{ км}$, падающая под углом 42° на границу раздела между двумя слоями земной коры с различными свойствами, испытывает преломление, причем угол преломления составляет 26° . Найдите скорость волны во второй среде.

10. Источник света расположен на двойном фокусном расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстояни-

ем 30 см. На каком расстоянии от линзы нужно поместить плоское зеркало для того, чтобы лучи, отраженные от зеркала, вторично пройдя линзу, стали параллельными?

Географический факультет

1. Висячий мостик (рис. 17), имеющий форму дуги окружности радиусом 4 м, выдерживает максимальную нагрузку 1000 Н. С какой максимальной скоростью может ехать по нему велосипедист, масса которого (вместе с велосипедом) 90 кг?

2. Тело массой 1 кг бросили с некоторой высоты с начальной скоростью, равной 20 м/с и направленной под углом 30° к горизонту. Определите кинетическую энергию тела через 2 с после начала его движения. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

3. Два тела, массы которых 1 кг и 2 кг, движутся во взаимно перпендикулярных направлениях со скоростями 10 м/с и 15 м/с соответственно. После соударения первое тело остановилось. Какое количество теплоты выделилось при ударе?

4. Тонкостенный цилиндрический стакан массой 30 г, высотой 10 см и площадью дна 60 см^2 плавает в сосуде с керосином. В стакан наливают воду. Найдите максимальную высоту слоя воды в стакане (от его дна), при которой стакан еще не тонет.

5. Найдите число атомов ртути, содержащихся в объеме 1 см^3 при температуре 27°C , если давление паров ртути 0,75 Па.

6. Объем пузырька воздуха по мере всплывания его на поверхность со дна озера увеличился в 3 раза. Определите глубину озера. Температуру воды считайте постоянной. Атмосферное давление равно 10^5 Па.

7. Открытую пробирку с воздухом при давлении p_1 нагрели до температуры T_1 , затем герметически закрыли и охладили до температуры 10°C . Давление при этом упало до $0,7 p_1$. До какой температуры была нагрета пробирка? Тепловым расширением пробирки можно пренебречь.

8. Электрическая цепь состоит из включенных последовательно источника постоянного напряжения с внутрен-

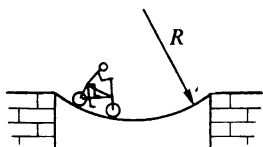


Рис. 17

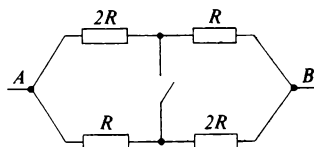


Рис. 18

ним сопротивлением 3 Ом, резистора сопротивлением 47 Ом, плоского воздушного конденсатора, площадь пластин которого равна 200 см², а расстояние между пластинами можно изменять. Если расстояние между пластинами составляет 1 см, то заряд конденсатора равен $8,85 \cdot 10^{-10}$ Кл. Какой силы ток будет протекать через резистор, если пластины сдвинуть до соприкосновения?

9. Когда ключ K замкнут, сопротивление между точками AB схемы, изображенной на рисунке 18, равно 80 Ом. Определите сопротивление между этими точками, когда ключ разомкнут.

10. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы, если при изменении расстояния от предмета до линзы, равного первоначально 0,3 м, на 0,1 м расстояние от линзы до действительного изображения предмета увеличивается вдвое.

Независимый московский университет

Письменный экзамен

В а р и а н т 1 (1991 г.)

Первый тур

1. Докажите, что треугольник ABC остроугольный тогда и только тогда, когда найдутся такие точки A' внутри стороны BC , B' внутри стороны AC и C' внутри стороны AB , что отрезки AA' , BB' и CC' равны.

2. Найдите отношение радиуса шара, вписанного в правильный тетраэдр, к радиусу шара, описанного вокруг этого тетраэдра.

3. Существует ли бесконечная последовательность из 0 и 1 такая, что любая подпоследовательность, образованная элементами с номерами, составляющими арифметическую прогрессию, непериодична?

4. Для любых вещественных x и y выполняется неравенство

$$f(x) - f(y) \leq (x - y)^2.$$

Найдите все такие функции f .

5. Пусть a_1, a_2, \dots, a_{100} — некоторая перестановка чисел 1, 2, 3, ..., 100. Докажите, что сумма

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 100a_{100}$$

достигает наименьшего возможного значения для перестановки 100, 99, ..., 2, 1.

6. Дан отрезок AB , полукруг, построенный на нем как на диаметре, и две прямые, проходящие через точки A и B и касающиеся полукруга. Найдите прямую, параллель-

ную AB и такую, чтобы сумма площадей трех криволинейных фигур — двух треугольников и одного сегмента (рис. 19) — была минимальна.

Второй тур

7. Докажите, что многочлен

$$x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \dots - 2nx + 2n + 1$$

не имеет действительных корней.

8. Пусть L_1 , L_2 — периметры правильных n -угольников — описанного вокруг окружности с длиной L и вписанного в эту окружность; S_1 , S_2 — площади этих многоугольников, S — площадь круга. Докажите, что

а) $L_1 \cdot L_2 > L^2$; б) $S_1 \cdot S_2 < S^2$.

9. Докажите, что число $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ разлагается в произведение не менее чем n простых сомножителей (не обязательно различных).

10. Назовем коэффициентом неравнобедренности треугольника ближайшее к единице из отношений его сторон. Какие значения может принимать коэффициент неравнобедренности?

В а р и а н т 2 (1992 г.)

Первый тур

1. Пространственный неплоский шестиугольник имеет три пары параллельных противоположных сторон. Докажите, что в каждой из этих пар стороны равны.

2. Существует ли бесконечная возрастающая последовательность (a_n) неотрицательных целых чисел, для которой при любых i и j выполняется равенство $a_{i+j} = a_i + a_j$?

3. Известны расстояния a , b , c от точки M пространства до вершин A , B , C прямоугольника $ABCD$. Чему может быть равно расстояние от M до вершины D ?

4. Найдите

$$\max \{x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n\},$$

если x_1, \dots, x_n — неотрицательные действительные числа, причем $x_1 + \dots + x_n = 1$.

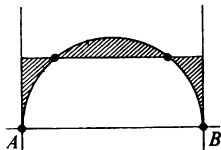


Рис. 19

5. Проведите через точку P внутри данного угла отрезок MN с концами на сторонах угла так, чтобы произведение $MP \cdot PN$ было наименьшим.

6. Все вершины равнобедренной трапеции лежат на параболе. Докажите, что основания трапеции перпендикулярны оси параболы

Второй тур

7. Докажите, что

$$\int_{-4}^4 \sqrt{x_2 + 9} dx \cdot \int_3^5 \sqrt{x_2 - 9} dx < 200.$$

8. Существует ли рациональная функция $R(x)$, не являющаяся константой и такая, что для любого x , для которого она имеет смысл, выполняются два равенства:

а) $R(x) = R(1/x)$; б) $R(x) = R(1 - x)$?

($R(x)$ называется рациональной функцией, если ее можно представить как $\frac{p(x)}{q(x)}$, где p и q — многочлены, причем q — ненулевой).

9. Рассмотрим четыре угла между плоскостями граней правильного тетраэдра и некоторой фиксированной плоскостью.

а) Докажите, что косинусам этих углов можно приписать знаки так, что их сумма будет равна нулю.

б) Докажите, что сумма квадратов косинусов этих углов равна $4/3$.

Новосибирский государственный университет

Ф И З И К А

Письменный экзамен

Физический факультет

В а р и а н т 1

1. Два самолета летят навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями v . Завидев друг друга на расстоянии L , пилоты начинают разворот по окружностям, оставаясь в горизонтальной плоскости и не меняя величин скоростей. Найдите минимальное расстояние между самолетами, если повороты выполняются с одинаковыми ускорениями a .

2. В объеме V_0 при температуре T_0 и давлении p находился воздух, содержащий некоторое количество озона O_3 . После долгого выдерживания в тени озон полностью

превратился в молекулярный кислород O_2 , и при том же давлении температура воздуха стала T , а объем V . Найдите начальное число молей озона.

3. Между вертикальными проводящими рельсами, расположенными на расстоянии l друг от друга, последовательно включены конденсатор емкостью C и резистор сопротивлением R (рис. 20). Сверху рельсы замкнуты горизонтальной идеально проводящей планкой массой m . Перпендикулярно плоскости приложено однородное маг-

нитное поле с индукцией \vec{B} . Планку толкают вниз, и она начинает скользить по рельсам без трения. При какой начальной скорости планки (v_0) в цепи будет течь постоянный ток?

4. Наливая молоко, вы пролили его на клеенку и обнаружили, что под слоем молока еле заметен ее рисунок. Полагая, что молоко представляет собой взвесь маленьких шариков жира в воде, оцените размер этих шариков.

5. На наклонной плоскости находятся два соприкасающихся друг с другом цилиндра (рис. 21). Нижний цилиндр начинают медленно спускать без вращения. При этом верхний цилиндр в случае малого наклона плоскости к горизонту вращается, а в случае большого наклона — скользит без вращения. Объясните явление.

В а р и а н т 2

1. Трубка погружена открытым концом в сосуд с ртутью, плотность которой ρ . Высота столбика воздуха в трубке h_1 , а высота столбика ртути относительно ее уровня в сосуде H_1 . Затем трубку погружают в ртуть еще больше, так что через достаточно большое время эти высоты оказываются равными h_2 и H_2 соответственно. Найдите атмосферное давление.

2. Тело массой m соскальзывает с наклонной плоскости с ускорением a . Каким будет ускорение, если тело прижать с силой N еще одной плоскостью, параллельной наклонной? Коэффициенты трения скольжения между телом и плоскостями одинаковы и равны μ .

3. Конденсатор емкостью C после замыкания ключа K_1 начинает разряжаться через резистор сопротивлением R и

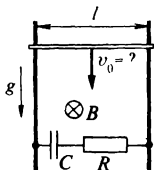


Рис. 20

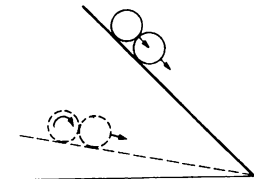


Рис. 21

катушку индуктивностью L (рис. 22). В момент, когда ток в цепи достигает максимального значения I_0 , замыкают ключ K_2 . Чему равны напряжение на катушке непосредственно перед замыканием ключа K_2 и максимальный ток в цепи при последующих колебаниях?

4. На рычажных весах в открытых сосудах при температуре 0°C уравновешены литр воды и соответствующий кусок льда. Лед растаял. Оцените, сколько воды и куда нужно добавить, чтобы восстановить равновесие.

5. В прозрачный цилиндрический сосуд с водой опущен вертикальный непрозрачный цилиндр. Его обводят по окружности так, что поверхность цилиндра касается стенки сосуда. В некоторый момент обводки кажется, что цилиндр «заполнил» весь сосуд. Объясните явление.

В а р и а н т 3

1. Имеются N собирающих линз с фокусным расстоянием F и N рассеивающих линз с фокусным расстоянием $-F/2$. Линзы установлены поочередно так, что расстояние между соседними линзами равно $F/2$ (рис. 23). Вдоль оси в систему входит параллельный пучок света диаметром D . Найдите диаметр выходящего пучка.

2. Частица с зарядом q и массой m налетает со скоростью v на неподвижную стенку перпендикулярно ее поверхности. В этот момент включается однородное маг-

нитное поле с индукцией B , параллельное стенке и перпендикулярное скорости частицы. Стенка отражает частицу, увеличивая ее скорость при каждом отражении на величину u . Найдите расстояние между точками i -го и k -го отражений.

3. Невесомый стержень OA длиной l с грузиком массой m на конце может вращаться без трения вокруг точки O , расположенной на поверхности стола. Другой грузик — массой M — прикреплен к первому при помощи нерастяжимой нити, пропущенной через отверстие в столе на расстоянии $l/2$ от точки O . В начальный момент стержень вертикален, его скорость равна нулю. Далее стержень отпускают. Найдите скорость грузика массой m в момент, когда он коснется поверхности стола.

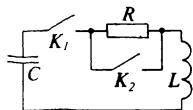


Рис. 22

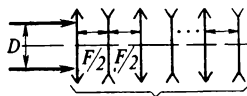


Рис. 23

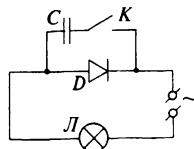


Рис. 24

4. Оцените, во сколько раз среднее расстояние между молекулами пара над кипящей водой больше расстояния между молекулами воды.

5. Электрическая лампочка L подключена через диод D к источнику переменного напряжения (к сети). Параллельно диоду с помощью ключа K может быть присоединен конденсатор C (рис. 24). При замкнутом ключе лампочка горит заметно ярче, чем при разомкнутом. Объясните явление.

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

(факультеты математико-механический, прикладной математики — процессов управления)

1. От перекрестка расходятся три дороги под углом 120° друг к другу. Три пешехода вышли с перекрестка одновременно с постоянными скоростями, образующими арифметическую прогрессию. Через 2 часа пути расстояние между самым медленным и самым быстрым пешеходом равнялось $2\sqrt{76}$ км, а между самым медленным и третьим пешеходом — $2\sqrt{61}$ км. Найдите скорости пешеходов.

2. Решите уравнение

$$3 - 4 \sin x = \sqrt{2 \sin x - 1}.$$

3. Найдите все вещественные значения a такие, при которых неравенство

$$a(2 + \sin^2 x)^4 + \cos^2 x + a > 11$$

выполняется для всех x .

4. Дан прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Диаметр круга совпадает с большим катетом. Вычислите площади частей круга, на которые он разбивается гипотенузой треугольника.

5. Дан цилиндр с объемом V . Определите его высоту и радиус основания, при которых периметр осевого сечения цилиндра имеет наименьшее значение.

В а р и а н т 2

(экономический и биолого-почвенный факультеты)

1. Корни уравнения $x^3 - 6x^2 + 3x + a = 0$ при некото-

ром a образуют арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \lg(x+y) = \lg x + \lg y \\ \sin \pi(x+y) + \sin \pi x + \sin \pi y. \end{cases}$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\sin x - \sqrt{\sin x}}{\cos x - \sqrt{\cos x}} = 1.$$

4. Постройте график функции $y = x^2 - |x - x^2|$.

5. Вершины куба с ребром 1 являются центрами шаров одинакового радиуса. Объем части куба, расположенной вне шаров, равен $1/2$. Какая часть ребра куба лежит вне шаров?

Московский авиационный институт

Ф И З И К А

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

1. В маленькую металлическую пластинку массой 0,2 кг, подвешенную на невесомой нерастяжимой нити длиной 1 м, абсолютно упруго ударяет шарик массой 10 г, летящий горизонтально. Вычислите импульс шарика до удара, если после удара нить отклонилась на угол 60° . Трением и сопротивлением воздуха можно пренебречь.

2. В сосуде объемом 10 л находится 1 г водорода при температуре $2 \cdot 10^3$ К. Определите давление газа, если при такой температуре половина молекул диссоциирована на атомы.

3. В круговом процессе, изображенном на рисунке 25, участвуют 5 молей идеального газа. Направление процесса (цикла) указано стрелками. Найдите работу, совершенную газом за цикл, если на участке 2—3 к нему подводится

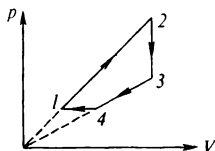


Рис. 25

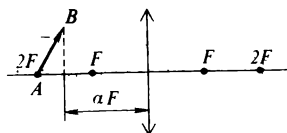


Рис. 26

8000 Дж тепла, а температуры газа в состояниях 1 и 4 равны соответственно 300 К и 450 К.

4. Вокруг отрицательного точечного заряда, равного -5 нКл и находящегося в воздухе, равномерно движется по окружности маленький заряженный шарик. Чему равно отношение заряда шарика к его массе, если угловая скорость вращения шарика 5 рад/с, а радиус окружности 3 см?

5. На рисунке 26 дано расположение предмета AB относительно тонкой собирающей линзы. Размеры, указанные на рисунке, заданы; α — постоянная ($1 \leq \alpha \leq 2$). Постройте изображение предмета в линзе и найдите отношение длин изображения и предмета.

6. С единицы площади поверхности Солнца каждую секунду излучается энергия, равная 74 МВт/м². Оцените, на сколько уменьшается из-за этого масса Солнца за год. Радиус Солнца $6,95 \cdot 10^8$ м.

В а р и а н т 2

1. На горизонтальной поверхности лежат два тела, связанные нитью. Масса одного тела втрое больше массы второго. На тело меньшей массы действует горизонтальная сила, равная 4 Н. Трения нет. Каково натяжение нити, связывающей тела?

2. Какая часть массы идеального газа израсходована из баллона, если давление в баллоне уменьшилось с 10 атм до 8 атм? Процесс считайте изотермическим.

3. С какой минимальной скоростью влетает метеорит в атмосферу Земли, если при этом он нагревается, плавится и превращается в пар? Метеоритное вещество состоит из железа, его начальная температура 3°C . Предполагается, что в тепло превращается 80% потерянной механической энергии.

4. Когда к источнику тока поочередно присоединяли два разных сопротивления, тепловая мощность, выделяемая в них, была равна 30 Вт и 60 Вт. Какова будет тепловая мощность, если замкнуть источник на оба сопротивления, соединенные последовательно? Внутренним сопротивлением источника можно пренебречь.

5. Кольцо радиусом 10 см из медной проволоки диаметром 1 мм помещено в однородное магнитное поле с индукцией 1 Тл так, что плоскость кольца перпендикулярна линиям индукции. Кольцо деформируют в квадрат. Какое количество электричества протечет через сечение проволоки?

6. Используя боровскую модель атома водорода, найдите радиус орбиты, при переходе на которую в спектре испускания наблюдаются линии серии Бальмера.

**Московский государственный авиационный
технологический университет
им. К. Э. Циолковского**

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

1. Решите уравнение

$$\log_3(3^x - 8) = 2 - x.$$

2. Определите промежутки монотонности функции

$$y = 4x^2e^{2x} + 16xe^{2x} + e^{2x}.$$

3. Решите уравнение

$$4\sin^2 x \cdot \sin^2 2x = \cos 4x \cos 2x.$$

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$3\sqrt{x+2} = 2x + a$$

имеет решение?

5. Двое рабочих выполнили работу менее чем за 4 часа. Если бы первый выполнял ее в одиночку, он сделал бы работу на 6 часов быстрее, чем один только второй рабочий. Какие значения может принимать время выполнения работы первым из рабочих, работающим отдельно?

6. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB и площадью 30 точка O — центр вписанной окружности. Площадь треугольника AOB равна 13. Найдите длины сторон треугольника ABC .

В а р и а н т 2

1. Решите уравнение

$$\log_2(x+2) + \log_2(x+3) = 2 + \log_2 3.$$

2. Определите промежутки монотонности функции

$$y = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^6 x - \cos^6 x = 2(\sin^4 x + \cos^4 x) - 1.$$

4. При каких значениях параметра k уравнение

$$4^x + k \cdot 2^{x+2} + 4k + 3 = 0$$

имеет единственное решение?

5. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми равно 180 км, выезжает автомобиль. Через час после отправления он из-за поломки делает остановку на полчаса, а затем продолжает движение, увеличив скорость на 20 км/ч. При каких значениях первоначальной скорости автомобиля он может прибыть в B не позже запланированного срока?

6. Площадь трапеции $ABCD$ равна 24, а длины оснований AD и BC относятся как 3 : 1. Вершины A и D соединены отрезками с точкой N — серединой стороны BC , а точки B и C с точкой M — серединой стороны AD . Отрезки AN и BM пересекаются в точке E , а отрезки DN и CM — в точке K . Найдите площадь четырехугольника $ENKM$.

Ф И З И К А

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

1. Два тела бросают с высоты 20 м со скоростью 15 м/с каждое. С какими скоростями тела упадут на землю, если первое тело брошено вертикально вверх, а второе — горизонтально? Сопротивление воздуха не учитывайте.

2. Моль атомов углерода собран в куб. Оцените ребро этого куба и линейный размер атома углерода, если плотность углерода составляет $2,3 \cdot 10^3$ кг/м³.

3. Заряженный до потенциала 20 В металлический шар радиусом 5 см помещают внутрь полого металлического шара радиусом 10 см, заряженного до потенциала 30 В. Определите потенциалы шаров после их соприкосновения.

4. Угол падения светового луча на стеклянный шар, изготовленный из материала с показателем преломления 1,41, равен 45°. Определите угол отклонения луча от первоначального направления после двух преломлений на границе стекло — воздух.

5. По наклонной плоскости, составляющей угол 45° с горизонтом, скользит доска массой 3 кг. Коэффициент трения доски о плоскость 0,6. На доску кладут тело, которое скользит по доске без трения. При каких значениях массы этого тела доска остановится?

6. Источник с ЭДС 10 В и нулевым внутренним сопротивлением в начальный момент замыкают на последовательно соединенные катушку индуктивностью 5 мГн и конденсатор емкостью 2 мкФ. Найдите максимальный ток в контуре и максимальный заряд на конденсаторе.

В а р и а н т 2

1. Какой шунт нужно подсоединить к гальванометру, имеющему шкалу на 100 делений с ценой деления 1 мкА

и внутреннее сопротивление 180 Ом, чтобы им можно было измерять ток до 1 мА?

2. Собирающая линза дает прямое изображение предмета с увеличением 2. Расстояние между предметом и его изображением 20 см. Определите фокусное расстояние линзы.

3. Каким должен быть угол наклона крыши сарая к горизонту, чтобы дождевая вода стекала с нее как можно быстрее? Трение не учитывайте.

4. Термос заполнили кипящей водой и герметически закрыли пробкой. Какая сила потребуется, чтобы вытянуть пробку, когда вода в термосе остынет до комнатной температуры? Диаметр пробки 3 см; атмосферное давление 10^5 Па. Трением и давлением паров воды при комнатной температуре можно пренебречь.

5. Камера заполняется смесью водорода с кислородом при температуре 300 К и давлении 10^5 Па. Парциальные давления газов в камере одинаковы. После герметизации камеры производится взрыв. Определите давление в камере после охлаждения продуктов реакции до 400 К.

6. Автомобиль массой 1000 кг трогается с места. Коэффициент трения колес о полотно дороги 0,5; мощность двигателя 50 кВт. Какой максимальной скорости может достичь автомобиль за 5 с, если обе оси автомобиля ведущие?

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

1. Один рабочий должен был изготовить 36 деталей, второй — 20 деталей. Первый делал в день на 2 детали больше, чем второй, и затратил на изготовление своего заказа на 1 день меньше, чем второй. По сколько деталей делали в день рабочие?

2. Найдите все решения уравнения

$$\sin x + \cos \left(5x - \frac{\pi}{2} \right) = \sqrt{3} \sin (3x + \pi),$$

принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$.

3. Решите уравнение

$$\frac{\lg (5x^2 - 16x + 13)}{\lg (x - 1)} = 2.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{2^x - 1}{x - 2} > 0.$$

5. Найдите площадь треугольника, ограниченного осью Ox , прямой $x = 4$ и касательной к графику функции

$$y = x^2 - 2x + 4$$

в точке с абсциссой $x_0 = 4$. Постройте чертеж.

6. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} x = y^2 - 2y, \\ y^2 + x^2 + a^2 = 2y + 2ax \end{cases}$$

имеет решение.

7. Через точку, лежащую на одной из сторон основания правильной треугольной призмы, и диагональ боковой грани, не пересекающую эту сторону, проведена плоскость. Какую наименьшую площадь может иметь сечение призмы этой плоскостью, если высота призмы равна $h = 2$, а сторона основания $a = 4$? На какие части секущая плоскость делит сторону основания в этом случае?

В а р и а н т 2

1. Рабочий должен изготовить 40 деталей. После того как была выполнена половина работы, он стал изготавливать на одну деталь в час меньше. За какое время он должен был выполнить всю работу, если первые 30 деталей он изготовил за 6,5 часа?

2. Найдите все решения уравнения

$$3 + \cos 2x + 3\sqrt{2} \cos x = 0,$$

принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

3. Решите уравнение

$$\left(1 + \log_2 \left[\frac{3}{2} - x\right]\right) \log_x \frac{1}{2} = 1.$$

4. Решите неравенство

$$81^x - 16^x < \frac{5}{8} \cdot 36^x.$$

5. Решите уравнение

$$\log_2 (6x - x^2 - 5) = x^2 - 6x + 11.$$

6. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2y = |x| - x, \\ y = a + 1 + \frac{(x-a)^2}{2} \end{cases}$$

имеет решение.

7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребрами $AB = 6$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$ через его диагональ AC_1 проведена плоскость так, что полученное сечение имеет наименьшую сумму квадратов сторон. Найдите площадь сечения и угол между секущей плоскостью и гранью $ABCD$.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Ф И З И К А

Задачи устного экзамена

1. Во сколько раз необходимо увеличить мощность вентилятора, чтобы скорость создаваемого им воздушного потока увеличилась вдвое? Сжимаемостью воздуха можно пренебречь.

2. Тонкий стакан массой 50 г ставят вверх дном на поверхность воды и медленно погружают так, что он все время остается в вертикальном положении. Высота стакана 10 см, площадь дна 20 см². На какую глубину следует опустить стакан, чтобы затем он сам утонул? Атмосферное давление 100 кПа.

3. Стеклянная трубка, запаянная с одного конца, расположена горизонтально. В трубке находится воздух, отделенный от атмосферы столбиком ртути длиной 10 см. Трубку начинают двигать равноускоренно с ускорением 10 м/с² в направлении ее оси сначала в сторону запаянного конца, а затем — в противоположную. Определите величину атмосферного давления, если в первом случае длина воздушного столбика в трубке в 1,3 раза больше, чем во втором.

4. Смешали 1 м³ воздуха с влажностью 20 % и 2 м³ воздуха с влажностью 30 %, имеющих одинаковую температуру. Определите влажность образовавшейся смеси, если она занимает объем 3 м³.

5. Протон, летящий в направлении ядра атома He, на очень большом расстоянии от ядра имеет скорость $2 \cdot 10^4$ м/с. На какое расстояние протон сможет приблизиться к ядру?

6. Электрическая печь должна выпаривать 1 кг воды за 10 мин. Начальная температура воды 20 °С. Какова должна быть длина нихромовой спирали сечением 1 мм², используемой в качестве нагревателя, если печь работает от сети с напряжением 120 В и ее КПД 80 %?

7. Однородное магнитное поле имеет резкую границу в виде плоскости, параллельной линиям вектора магнитной индукции. Определите, на сколько в глубь поля проникнет альфа-частица с энергией 10 МэВ, подлетевшая к границе поля под углом 30° к ней и под прямым углом к линиям вектора магнитной индукции. Индукция магнитного поля 0,2 Тл.

8. Кусок провода длиной 8 м складывают вдвое и концы его замыкают. Затем провод растягивают в квадрат в плоскости, перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля с индукцией 0,2 Тл. Какое количество электричества (какой заряд) пройдет по проводу, если его сечение 0,1 мм², удельное сопротивление материала провода 0,2 Ом·мм²/м? Силу тока в проводе во время опыта можно считать постоянной.

9. Пуля массой 10 г, летящая горизонтально со скоростью 200 м/с, попадает в ящик с песком массой 2 кг, лежащий на гладком горизонтальном столе, и застревает в нем. К ящику прикреплен один конец пружины жесткостью 200 Н/м, другой конец которой закреплен на вертикальной стене. Скорость пули направлена вдоль оси пружины. Определите амплитуду колебаний ящика.

10. Точечный источник света находится на дне сосуда с жидкостью. Толщина слоя жидкости 30 см, показатель преломления 5/4. Определите максимальное и минимальное время, которое свет, идущий от источника и выходящий из жидкости в воздух, затрачивает на прохождение слоя жидкости.

Московский инженерно-строительный институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

Решите уравнения:

$$1. \frac{2\log_6(x+2)}{\log_{36}(4x+20)^2} = 1.$$

$$2. \sqrt[5]{\frac{7}{6} \left[\frac{36}{49x^2} \right]^{-1} \left[\frac{6}{7} x^2 \right]^{-2/5}} = \frac{1}{x^3} \sqrt[5]{\left[\frac{7}{6} \right]^4 x^3}.$$

Решите неравенства:

3. $\frac{2^{x+1} - 22}{2^x - 2} \geq 1.$

4. $|x^2 + 2x - 4| > 4.$

5. Найдите $\operatorname{ctg} \left[2\alpha - \frac{3}{2}\pi \right]$, если известно, что

$$\sin(\pi - \alpha) = \frac{\sqrt{5}}{4}, \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

6. При каких значениях p уравнение

$$\sqrt{p(x+1)+9} - 4 = 2x + 1$$

имеет два различных корня?

7. В основании правильной пирамиды лежит треугольник со стороной 6. Найдите объем пирамиды, если боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° .

В а р и а н т 2

Решите уравнения:

1. $3^{x-1} \cdot 2^{x+1} + 2^{x-1} \cdot 3^x = \frac{7}{36}.$

2. $(36x)^{2/3} \left[3\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{6}}} \right] \left[\frac{6}{x^4} \right]^{-1/2} = 3\sqrt[3]{\left[\frac{6}{x^6} \right]^{-1}}$

Решите неравенства:

3. $(\log_{1/2} x + 2)(2 - \log_{1/4} x^2) \leq \log_{1/2} \left[\frac{x^3}{64} \right].$

4. $2\sqrt{11-2x} + x > 3.$

5. Найдите $\cos \left[\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right]$, если известно, что

$$\operatorname{ctg}(\alpha - 2\pi) = -\frac{1}{3}.$$

6. При каких положительных значениях b уравнение

$$x^2 + bx + 1 + |1 - x^2| = 0$$

не имеет корней?

7. Ромб, длины диагоналей которого равны 6 и 8, вращается вокруг стороны. Найдите объем фигуры вращения.

Ф И З И К А

Устный экзамен

Б и л е т 1

1. Равномерное и равноускоренное прямолинейное движение. Графическое представление движения. Графики зависимости кинематических величин от времени при равномерном и равноускоренном движениях.

2. Магнитные свойства вещества. Магнитная проницаемость. Ферромагнетизм.

3. Вычислите смещение луча при прохождении через стеклянную плоскопараллельную пластину, толщина которой 6 см. Угол падения 60° , показатель преломления 1,5.

Б и л е т 2

1. Принцип действия тепловых двигателей. КПД теплового двигателя и его максимальное значение. Тепловые двигатели и охрана природы.

2. Фотоэффект и его законы. Кванты света. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта. Постоянная Планка. Применение фотоэффекта в технике.

3. Два шарика, радиусы которых отличаются в 5 раз, заряжены равными одноименными зарядами. Во сколько раз изменится сила взаимодействия между шариками, если их соединить проволокой?

Московский инженерно - физический институт

М А Т Е М А Т И К А

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

1. Решите неравенство

$$(x + 2) \log_{1,5}(4 - x) \geq 0.$$

2. При каких $y \in R$ числа

$$\sqrt{y^2 + 2y + 1}, \frac{y^2 + 3y - 1}{3}, y - 1,$$

взятые в указанном порядке, являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

3. Решите уравнение

$$(x - 12) \left[2 \cos^2 \frac{\pi x}{3} + 5 \cos \frac{\pi x}{3} + 2 \right] = 0$$

и найдите все значения d , при которых это уравнение на промежутке $[d; d + 5]$ имеет три различных корня.

4. Верхнее основание $R_1S_1T_1$ прямой треугольной призмы $RSTR_1S_1T_1$ является правильным треугольником,

площадь которого равна $\frac{\sqrt{3}}{4} c^2$. Через прямую RS проведе-

на секущая плоскость, составляющая угол γ с ребром TT_1 . Определите радиус окружности, описанной около полученного в сечении треугольника.

В а р и а н т 2

1. Найдите все корни уравнения

$$4 \sin \left[x - \frac{\pi}{3} \right] \cos x = -\sqrt{3},$$

принадлежащие промежутку $[-1; 3]$.

2. Имеются два сплава никеля и железа. Первый сплав содержит 40 % железа, второй — 20 % никеля (по массе). Определите, сколько килограммов каждого сплава надо взять, чтобы получить 3 кг третьего сплава, в котором процентное содержание железа в 1,5 раза больше, чем никеля.

3. Решите неравенство

$$\log_2 ax + \log_a x \leq 1.$$

4. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC , а все боковые ребра пирамиды имеют одинаковую длину d . Боковая грань пирамиды составляет с плоскостью основания угол величиной β . Через ребро BC проведена плоскость, пересекающая отрезок SA . Определите площадь образовавшегося сечения пирамиды, если известно, что эта площадь имеет наименьшее возможное значение.

В а р и а н т 3

1. Решите уравнение

$$2 \sin (2x + 1,5\pi) - 11 \sin x - 1 = 0.$$

2. Решите неравенство.

$$\frac{x - 2\sqrt{x} - 8}{2^x - 4} \geq 0.$$

3. Найдите интервалы монотонного возрастания функции

$$f(x) = x^2 + 2^{\log_2(a - |4 - x|)}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

4. Высота SO правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна H , а величина угла ASC (AS и CS — противоположные боковые ребра) равна 2α . На прямой SO взята точка K такая, что $SK : SO_1 = 1:3$ (O_1 — центр описанной около пирамиды сферы). Определите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной плоскости основания пирамиды и проходящей через точку K .

Ф И З И К А

Устный экзамен

Б и л е т 1

1. Найдите температуру воздуха, при которой он вблизи поверхности Земли имеет плотность $1,28 \text{ кг/м}^3$ и давление 10^5 Па .

2. Постройте изображение протяженного предмета в тонкой рассеивающей линзе.

3. Максимальная мощность, которую батарея может отдать во внешнюю цепь, составляет 15 Вт . Зная, что ток короткого замыкания для этой батареи равен 5 А , найдите ЭДС батареи.

4. Протон сталкивается с покоящимся невозбужденным атомом водорода. После столкновения протон летит в том же направлении со скоростью $1,5 \cdot 10^4 \text{ м/с}$, а атом переходит в состояние с более высокой энергией. Спустя некоторое время, атом возвращается в невозбужденное состояние, излучая при этом волну длиной 132 нм . Определите скорость протона до столкновения с атомом.

Б и л е т 2

1. Шарик массой m_1 , имеющий скорость v_1 , налетает на покоящийся шарик массой m_2 . После абсолютно упругого центрального соударения оба шарика движутся в том же направлении, в котором двигался первый шарик до столкновения, со скоростями v_1' и v_2' соответственно. Напишите закон сохранения импульса (в скалярной форме) для системы этих двух шариков.

2. Определите давление, при котором в объеме 1 м^3 при температуре 60°С содержится $2,4 \cdot 10^{26}$ молекул газа.

3. Если предмет расположить перед передним фокусом собирающей линзы на расстоянии 10 см от него, то изо-

бражение получится на расстоянии 2,5 м за задним фокусом. Найдите оптическую силу линзы.

4. Квадратный замкнутый виток проволоки, длина стороны которого l , а сопротивление единицы длины ρ , проходит с постоянной скоростью v между полюсами электромагнита, создающего однородное магнитное поле с индукцией B , перпендикулярное плоскости витка. Считая индукцию поля вне полюсов равной нулю, определите энергию, превратившуюся в тепло, если размер полюсов в направлении движения витка больше l .

Московский институт электронного машиностроения

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

(досрочный экзамен факультета прикладной математики)

1. Решите уравнение

$$\frac{4x + a}{2x - a} - \frac{3x - a}{x + a} = \frac{10a - 2x}{2x + a - a^2}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_4(x^2 - 4x + 2) - \log_4(x^2 - 6x + 5) = -\frac{1}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{4\cos x + 3\sin 2x} - 2\cos x = 1.$$

4. Ребро куба $ABCA'B'C'D'$ равно a . Найдите радиус сферы, проходящей через середины ребер AA' , BB' и через вершины A и C' .

5. Пусть числа x и y удовлетворяют соотношению

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0.$$

Найдите все значения, которые может принимать а) x ;
б) $4x + 3y$.

В а р и а н т 2

(основной экзамен факультета прикладной математики)

1. Решите уравнение

$$3 + \frac{2a - 3}{(x - 2)(x + a)} = \frac{2x + 5a}{x + a}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{3^x - 25}{x + 1} \leq \frac{3^x - 25}{x - 3}.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\cos x - \sin 2x}{\cos 3x} = 1.$$

4. Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания, равной a , и двугранным углом при основании, равным 2α , пересечена плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании. Найдите площадь сечения.

5. Установите, при каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos^2 y = (a^2 - 4)^2 + 1, \\ \cos x \sin 2y = a + 2 \end{cases}$$

имеет решение. Найдите все решения.

В а р и а н т 3

(досрочные экзамены на инженерные специальности)

1. Решите уравнение

$$\frac{2a - x}{x + a - 3} + \frac{3x - 2a}{x - a + 1} = 4.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{1/2}(x^2 - 4x - 1) - \log_{1/2}(x^2 - 3x - 2) = -1.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{7\sin x - \cos 2x + 2\cos x} = 0.$$

4. Сфера проходит через вершину A куба $ABCD A'B'C'D'$, середины ребер AB и AD , касается грани $A'B'C'D'$. Найдите отношение площади поверхности сферы к площади полной поверхности куба.

5. Пусть числа x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} y - x \leq 5, \\ y + 4x \leq -5, \\ 3y + 2x \geq -5. \end{cases}$$

Покажите, что при этом $-4 \leq x \leq -1$ и найдите все значения, которые могут принимать: а) сумма $x^2 + y^2$; б) отношение y/x .

В а р и а н т 4

(основной экзамен инженерных факультетов)

1. Решите уравнение

$$\frac{x^2 + 1}{n^2x - 2n} - \frac{1}{2 - nx} = \frac{x}{n}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_6 \left[6^{\frac{1-2x}{3x-2}} + \frac{23}{6} \right] = \log_6 4 + \frac{1-x}{3x-2}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - 2\sin x} + \sqrt{6 \cos x} = 0.$$

4. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ со стороной a и острым углом α . Ребро AA_1 равно b и образует с ребрами AB и AD угол φ . Определите объем параллелепипеда.

5. Вычислите площадь треугольника, образованного осями координат и касательной к графику функции $y = x^3 + x^2 - 6x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Ф и з и к а

Задачи устного экзамена.

1. Тело массой 1 кг лежит на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 45° (рис. 27). Какой груз m_2 следует подвесить через систему неподвижных блоков, чтобы первое тело находилось в покое? Коэффициент трения о плоскость 0,2.

2. Однородный цилиндр длиной l плавает в вертикальном положении на границе двух не смешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 и делится этой границей пополам. Пренебрегая трением, найдите период малых вертикальных колебаний цилиндра.*

3. В открытой пробирке, вращающейся в горизонтальной плоскости с частотой 10 рад/с вокруг вертикальной

* Вязкостью и потерей энергии на волновые процессы в жидкостях предлагается пренебречь. (Прим. ред.)

оси, проходящей через открытый край пробирки, находится столбик ртути длиной 1 см. Передний край столбика отстоит от края на 20 см. До какой температуры надо нагреть пробирку, чтобы при вдвое выросшей частоте вращения столбик не сместился? Внешнее давление 10^5 Па, начальная температура 0°C .

4. Найдите работу, совершенную 1 молем идеального газа при изотермическом расширении в цикле $1-2-3-1$, если КПД цикла 20 % и $T_2 = 2T_1$ (рис. 28).

5. Давление воздуха в комнате при температуре 27°C равно 10^5 Па. Влажность воздуха при этом составляет 60 %. Каким будет давление сухого воздуха и давление пара при понижении температуры на 5°C ? Давление насыщенного пара при 27°C равно 3,56 кПа.

6. Во сколько раз изменится заряд на конденсаторе емкостью C_4 при пробое конденсатора емкостью C_1 (рис. 29)? Емкости конденсаторов равны: $C_1 = C_2 = 2$ пкФ, $C_3 = C_4 = 4$ пкФ.

7. Два элемента с ЭДС 5 В и 10 В и внутренними сопротивлениями 1 Ом и 2 Ом соответственно соединены последовательно и замкнуты на резистор сопротивлением R . При этом внутри второго элемента теряется мощность 4,5 Вт. Что покажет вольтметр, подключенный к его клеммам? Чему равно R ?

8. Частица массой $1,05 \cdot 10^{-25}$ кг и зарядом $3,2 \cdot 10^{-19}$ Кл влетает в однородное магнитное поле с индукцией $2 \cdot 10^{-5}$ Тл перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью $5 \cdot 10^4$ м/с. Найдите изменение импульса частицы за время 0,125 с.

9. Луч света от бесконечно удаленного источника падает на рассеивающую линзу с фокусным расстоянием 30 см. На расстоянии 40 см от рассеивающей линзы расположена собирающая линза с фокусным расстоянием 45 см. Главные оптические оси линз совпадают. На каком расстоянии от собирающей линзы находится изображение источника?

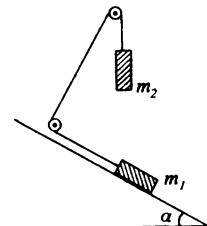


Рис. 27

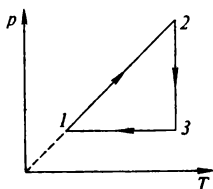


Рис. 28

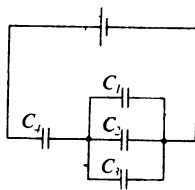


Рис. 29

10. Мощность излучения лазера 100 Вт, длина волны излучения $1,2 \cdot 10^{-6}$ м. Определите число фотонов, испускаемых лазером в единицу времени.

Московский институт электронной техники

Ф И З И К А

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

1. Динамометр, рассчитанный на 40 Н, имеет пружину жесткостью 500 Н/м. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы растянуть пружину от середины до конца шкалы динамометра?

2. На концах легкой нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешены два тела массой 240 г каждое. Вычислите массу добавочного груза, который надо положить на одно из тел, чтобы каждое из них прошло за 4 с путь 160 см.

3. В цилиндрическом сосуде под поршнем находится идеальный газ. При нагревании он расширяется так, что его давление остается постоянным. Найдите отношение количества теплоты, переданного газу в этом процессе, к работе, совершенной газом. Удельная теплоемкость газа при постоянном давлении c_p , молярная масса M .

4. Альфа-частица вылетает из ядра атома радия со скоростью $2 \cdot 10^7$ м/с и попадает в однородное электрическое поле, линии напряженности которого направлены противоположно вектору скорости частицы. Какую разность потенциалов между начальным и конечным положениями пройдет частица до остановки? Какой должна быть напряженность поля, чтобы частица остановилась, пройдя расстояние 2 м?

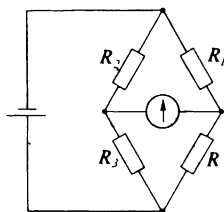


Рис. 30

5. Мост для измерения величины сопротивления R сбалансирован так, что ток через гальванометр не идет (рис. 30). Ток в правой ветви равен 0,2 А. Найдите сопротивление R и напряжение на зажимах источника тока. Сопротивления резисторов равны соответственно 2 Ом, 4 Ом и 1 Ом.

6. Расстояние от предмета до экрана 90 см. На каком расстоянии от предмета надо поместить между ним и экраном линзу с фокусным расстоянием 20 см, чтобы получить на экране отчетливое изображение предмета? Тот же вопрос в случае, когда расстояние от предмета до экрана 70 см.

В а р и а н т 2

1. Поезд при подходе к платформе начинает равнозамедленно тормозить и останавливается, пройдя путь 75 м. Найдите начальную скорость поезда, если за предпоследнюю секунду он прошел 2,25 м.

2. Какую мощность развивает человек, везущий по горизонтальной дороге груженные сани общей массой 40 кг? Коэффициент трения полозьев о дорогу 0,1. Сани человек тянет с помощью веревки, составляющей угол 30° с горизонтом. Скорость саней постоянна и равна 3 м/с.

3. Для определения теплоемкости металлического образца производится следующий опыт. Образец массой 200 г погружается на длительное время в кипящую воду, температура которой 100°C , а затем быстро переносится в теплоизолированный калориметр, содержащий 300 г воды при 20°C . В результате температура воды в калориметре возрастает на 30°C , после чего рост ее прекращается. Найдите удельную теплоемкость образца. Теплоемкостью калориметра можно пренебречь.

4. Три одинаковых точечных заряда, каждый из которых равен q , расположены в вершинах равностороннего треугольника. Где и какой точечный заряд нужно поместить, чтобы вся система находилась в равновесии?

5. Источник постоянного тока замкнут на резистор сопротивлением 2 Ом. Мощность, выделяющаяся во внешней цепи, не изменяется, если параллельно резистору подключить еще один такой же резистор. Найдите внутреннее сопротивление источника.

6. Какова максимальная длина волны света, который способен выбить из цезиевого образца электрон с кинетической энергией 2 эВ?

Московский педагогический государственный университет им. В. И. Ленина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

(математический факультет)

1. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно выезжают автобус и автомобиль. Если ко времени, затрачиваемому автомобилем на проезд из A в B , прибавить время, которое тратит автобус на проезд из B в A , то получится 12 часов. Определите, какое время автомобиль затрачивает на проезд из A в B , а автобус на проезд из B в A , если известно, что их разность составляет $9/20$ времени, прошедшего от начала движения автомобиля и автобуса до момента их встречи.

2. Решите неравенство

$$1 + \lg x^6 \cdot \log_5 x > \log_5 x^2 + \lg x^3.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{3} + \cos x}{2\sin^3 x - \cos x \sin 2x} > \frac{3}{2\sin 4x}.$$

4. Решите уравнение

$$2x^2 + \log_2(7 + 2x - x^2) = 4 + x^4.$$

5. Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B и углом A , равным α . Каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45° . Найдите угол между плоскостями SAC и SBC .

В а р и а н т 2

(математический факультет)

1. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено еще одно число так, что все три числа образуют арифметическую прогрессию. Если средний член этой прогрессии уменьшить на 6, то получится геометрическая прогрессия. Найдите неизвестное число.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{3x} \cdot \log_3 x} = -1.$$

3. Решите уравнение

$$|1 + \sin 3x| \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1 - \cos x}{\cos \frac{3\pi + 2x}{2}}.$$

4. а) На координатной плоскости изобразите множество всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$|y - x| + |y - 1| = 1.$$

б) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$|x - a| + |a - 1| = 1$$

имеет два решения. Найдите эти решения для каждого значения параметра a .

5. Основанием четырехугольной пирамиды $МАВСD$ служит прямоугольник $ABCD$, $AB = a$, $AD = b$. Грани $МAD$ и $МAB$ перпендикулярны плоскости основания, а грань $МDC$ составляет с ней угол в 45° . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

В а р и а н т 3

(физический факультет)

1. Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор радиусом 5 с центральным углом $6\pi/5$. Найдите объем конуса.

2. Упростите выражение

$$\left[\frac{a^{1/4} - b^{1/4}}{a^{1/2} + a^{1/4}b^{1/4}} + \frac{a^{1/4} + b^{1/4}}{a^{1/2} - a^{1/4}b^{1/4}} - \frac{2b^{1/2}}{a^{3/4} - a^{1/4}b^{1/2}} \right] (b^{1/2} - a^{1/2}).$$

3. Решите уравнение

$$2\sin^2 3x + \cos^2 3x + \sin 3x = 1.$$

4. Напишите уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 2x + 5$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

5. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 7x - 8}{x^2 - 7x + 20} > 0.$$

В а р и а н т 4

(индустриально-педагогический факультет)

1. Решите уравнение

$$0,4^{\lg^2 x + 1} = 6,25^{2 - \lg x^3}.$$

2. Решите уравнение

$$\cos^2 x + 1 = 3 \sin x \cos x.$$

3. Найдите объем и площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, у которой высота равна $\sqrt{3}$, а плоский угол при вершине равен 30° .

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-4y} + \sqrt{x+4y} = 6, \\ \sqrt{x^2-16y^2} = 8. \end{cases}$$

5. Найдите промежутки убывания функции

$$y = \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - 2x^3.$$

В а р и а н т 5

(художественный факультет)

1. В конус вписан шар. Найдите объем шара, если образующая конуса равна l и наклонена к основанию конуса под углом α .

2. Решите неравенство

$$0,5^{x^2-3x-6} < 4.$$

3. Найдите двузначное число, если число его единиц на 2 больше числа десятков и произведение данного числа на сумму его цифр равно 144.

4. Решите уравнение

$$\cos 4x = -2 \cos^2 x.$$

5. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{x-4}{x^2-4}}.$$

Задачи устного экзамена

(математический факультет)

1. К двузначному числу слева и справа приписали по 1. В результате получилось число в 23 раза больше первоначального. Определите это число.

2. Определите, при каких значениях параметра a прямая $y = (2a + 6)x + 1$ касается параболы $y = (a - 3)x^2 - 2$.

3. Постройте график функции

$$y = \frac{|x| + 2}{|x| - 1}.$$

4. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

5. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{(1 - 3|x|)(3 - |x|)}{|x|}.$$

6. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y = 2 \sin x + \cos x$,

б) $y = \frac{1 + \sin x \cos x}{3 + \sin 2x}$,

в) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

7. Докажите неравенство:

а) $\sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{1}{4}$;

б) $\cos 2x \geq 6 \cos x - 5$.

8. Определите, при каких значениях p сумма кубов корней уравнения $x^2 + x + p = 0$ равна -16 .

9. Докажите тождество

$$4 \sin^3 x \cos 3x + 4 \cos^3 x \sin 3x = 3 \sin 4x.$$

10. Докажите, что для любого натурального числа n

$$\sin^{2n} \alpha + \cos^{2n} \alpha \leq 1.$$

11. В полуокружность с радиусом $\sqrt{5}$ вписан квадрат так, что две его вершины лежат на диаметре полуокружности. Найдите длину стороны квадрата.

12. Около окружности с радиусом 2 описана равнобокая трапеция, площадь которой равна 20. Найдите боковую сторону трапеции.

13. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36, вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении 2:3. Найдите длину гипотенузы

14. Точка, лежащая внутри угла в 60° , удалена от его сторон на расстояния a и b . Найдите расстояние от этой точки до вершины угла.

15. Из вершины B треугольника ABC опущены перпендикуляры BK и BL на биссектрисы внешних углов треугольника, не смежных с углом B . Докажите, что длина отрезка BK равна полупериметру треугольника ABC .

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Аэростат поднимается вертикально вверх с ускорением 2 м/с^2 . Через 5 с от начала движения из него выпал предмет. Через какое время этот предмет упадет на землю?

2. Спутник движется вокруг некоторой планеты по круговой орбите радиусом $4,7 \cdot 10^9 \text{ м}$ со скоростью 10^4 м/с . Какова средняя плотность планеты, если ее радиус $1,5 \cdot 10^8 \text{ м}$?

3. С какой скоростью должен двигаться велосипедист по выпуклому мосту, имеющему радиус кривизны 120 м, чтобы в верхней точке траектории давление на дорогу было в 3 раза меньше, чем при движении на горизонтальном участке?

4. Бревно, имеющее длину 3,5 м и диаметр 0,3 м, плавают в воде. Какова масса человека, который может стоять на бревне, не замочив ног? Плотность дерева $0,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

5. В закрытом сосуде емкостью 1 м^3 находится 0,9 кг воды и 1,6 кг кислорода. Каким будет давление в сосуде при температуре 500°С , если известно, что при этой температуре вся вода превращается в пар?

6. Как изменится ускорение падающего тела массой 4 г, если ему сообщить заряд $3,3 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$? Напряженность электрического поля Земли равна 100 В/м и направлена нормально ее поверхности.

7. Емкости двух металлических шаров равны 10 пФ и 20 пФ , а заряды на них $1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$ и $3 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$ соответственно. Как перераспределятся заряды, если шары соединить проволокой? Емкостью проволоки можно пренебречь.

8. К источнику тока с ЭДС 2 В присоединили проводник сопротивлением 0,2 Ом. При этом амперметр показал силу тока 0,5 А. Когда к источнику последовательно присоединили еще один такой же, амперметр показал 0,2 А. Определите внутренние сопротивления источников.

9. Нагревательная спираль электроаппарата для кипячения воды имеет при температуре 100 °С сопротивление 10 Ом. Какой ток надо пропустить через эту спираль, чтобы аппарат испарил 100 г воды за время 1 мин?

10. Луч света падает под углом 30° на плоскопараллельную пластину и выходит из нее параллельно первоначальному лучу. Какова толщина пластины, если расстояние между лучами 1,94 см? Показатель преломления стекла 1,5.

Московский технический университет связи и информатики

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

(факультеты многоканальной электросвязи,
автоматизации предприятий связи и автоматической
электросвязи)

1. Найдите все значения a , при которых числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x > y$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x^5 - 2x^3 + x + 2$$

на отрезке $[1/2; 2]$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2} x \log_4 10 - \log_4 x = y - \log_4 y, \\ \log_5 x - \log_5 y = y - \frac{1}{2} x \log_5 2. \end{cases}$$

4. В геометрической прогрессии с положительными членами $S_2 = 4$, $S_3 = 13$. Найдите S_4 .

5. Решите неравенство

$$\sqrt{0,5(15^x + 9)} \leq \sqrt{15^x + 12} - \sqrt{0,5(15^x - 9)}.$$

6. Решите уравнение

$$9 \arccos^2 2x - 3\pi \arccos 2x - 2\pi^2 = 0.$$

7. Решите уравнение

$$\cos(\pi x^2) = \cos(\pi(x^2 + 2x)).$$

8. Постройте график функции

$$y = \left[\frac{2}{1-4x^2} + \frac{1}{2x^2+5x-3} \left(x + \frac{3x-6}{x-2} \right) \right] \sqrt{1+4x+4x^2}.$$

9. При каких значениях параметра a уравнение

$$144^{-|2x-1|} - 2 \cdot 12^{-|2x-1|} + a = 0$$

имеет корни?

10. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α . Двугранные углы при основании пирамиды равны между собой и равны β . Найдите объем пирамиды

В а р и а н т 2

(инженерно-экономический факультет, а также специальности "вычислительная техника", "программное обеспечение", "прикладная математика")

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = e^{2x} + e^{-2x}$$

на отрезке $[-2; 1]$.

2. Моторная лодка и парусник, находясь на озере на расстоянии 30 км друг от друга, движутся навстречу друг другу и встречаются через час. Если бы моторная лодка находилась в 20 км от парусника и догоняла его, то на это потребовалось бы 3 часа 20 минут. Определите скорость лодки и скорость парусника.

3. Решите уравнение

$$2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$$

4. Найдите угол α , удовлетворяющий неравенствам $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; если известно, что $\operatorname{tg} 2\alpha = -12/5$.

5. В равнобокой трапеции, описанной около круга, отношение боковой стороны к меньшему основанию равно k . Найдите углы трапеции и допустимые значения k .

6. Найдите плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды, если этот угол равен углу между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

7. Решите неравенство

$$\frac{\quad}{1 - \lg x} < \frac{2 \lg x - 5}{\lg x}.$$

8. Постройте график функции

$$y = (\sin^2 \varphi - \cos^2(x - \varphi) + 2 \cos x \cos \varphi \cos(x - \varphi))^{\log_{\cos 2x} \sin |x|}$$

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + yz = 2a^2, \\ yz + zx = 2a^2 - a - 1, \\ zx + xy = 2a^2 + a - 1. \end{cases}$$

10. Найдите по крайней мере один корень уравнения

$$\left| \sin \frac{\pi x}{2} - 2 \right|^{\log_2 (2 - \frac{x}{\pi})} = (x^3 - 6x^2 + 5x + 1)^{\arccos \frac{\pi}{x}}.$$

В а р и а н т 3

(факультеты радиотехники, радиосвязи и радиовещания, а также специальность "бакалавр технических наук")

1. Решите неравенство

$$7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{2 - 3 \sin x + \cos(2x + \pi)}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0.$$

3. Решите уравнение

$$9^{\log_3 (1-2x)} = 5x^2 - 5.$$

4. Найдите производную функции $f(x)$, упростив предварительно ее выражение при $x > 3$:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3 + (x+1)\sqrt{x^2 - 9}}{x^2 - 2x - 3 + (x-1)\sqrt{x^2 - 9}} (x - 3).$$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = |x-2| + |x+2|, \quad y = 5.$$

6. В равнобедренном треугольнике дан угол при вершине α и длина l медианы, проведенной к боковой стороне. Найдите площадь S треугольника и выясните, каков должен быть $\cos \alpha$, чтобы S была наибольшей.

7. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны 2. Найдите радиус описанного шара.

8. Найдите все значения параметра a , при которых функция $f(x) = 2ax^3 - 21x^2 + 24ax$ убывает на всей числовой прямой.

9. Решите неравенство $x + \sqrt{a-x} > 0$, где a — параметр, удовлетворяющий условию $a \geq 0$.

10. Одновременно начали гонки с одного старта в одном направлении два мотоциклиста: один со скоростью 80 км/ч, другой — со скоростью 60 км/ч. Через полчаса с того же старта в том же направлении отправился третий гонщик. Найдите скорость третьего гонщика, если известно, что он догнал первого на 1 час 15 минут позже, чем второго.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

1. На рисунке 31 изображены две изотермы одной и той же массы газа. а) Чем отличаются состояния газов, если газы одинаковы? б) Чем отличаются газы, если их температуры одинаковы? Дайте пояснения.

2. Камень брошен с горы горизонтально со скоростью 15 м/с. Через какое время его скорость будет направлена под углом 45° к горизонту?

3. Точка находится на главной оптической оси рассеивающей линзы. Фокусное расстояние линзы — 40 см, а расстояние от линзы до мнимого изображения точки 30 см. Где находится точка?

4. Два шарика одинаковых радиусов и масс подвешены

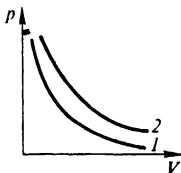


Рис 31

в воздухе на нитях длиной 0,2 м так, что их поверхности соприкасаются. После того как каждому шарiku сообщили заряд $4 \cdot 10^{-7}$ Кл, они разошлись на угол 60° . Найдите массу шариков.

5. Вольтметр рассчитан на измерение максимального напряжения 30 В, при этом через него идет ток 10 мА. Какое дополнительное сопротивление нужно присоединить к вольтметру, чтобы им можно было измерять напряжения до 150 В?

В а р и а н т 2

1. Два тела брошены вертикально вверх с одинаковыми начальными скоростями с интервалом времени τ . С какой скоростью будет двигаться второе тело относительно первого?

2. Точка находится на расстоянии 50 см от плоскости линзы, а ее мнимое изображение — на расстоянии вдвое меньшем. Найдите фокусное расстояние линзы.

3. Два сосуда, наполненные воздухом под давлениями $8 \cdot 10^5$ Па и $6 \cdot 10^5$ Па, имеют объемы 3 л и 5 л соответственно. Сосуды соединяют трубкой. Найдите установившееся давление в сосудах, если температура в них постоянна.

4. Определите расстояние между двумя одинаковыми электрическими зарядами, находящимися в масле с диэлектрической проницаемостью 3, если сила взаимодействия между ними такая же, как в воздухе на расстоянии 30 см.

5. Вольтметр, соединенный последовательно с резистором сопротивлением 10 кОм, при включении в сеть напряжением 220 В показывает 70 В, а соединенный последовательно с неизвестным резистором, показывает 20 В. Найдите сопротивление этого резистора.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

1. Решите уравнение

$$\log_{27} \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x \right) = \frac{1}{3} \log_3 (-\cos x).$$

2. В ромбе $ABCD$ из вершины D на сторону BC опущен перпендикуляр DK . Найдите длину стороны ромба, если

$$AC = 2\sqrt{6}, AK = \sqrt{14}.$$

3. Рассматриваются всевозможные параболы, ветви которых направлены вверх, касающиеся оси Ox и прямой

$$y = -\frac{4}{3}x + 8.$$

Найдите уравнение той из них, для которой сумма расстояний от начала координат до точек пересечения параболы с осями координат минимальна.

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (S — вершина) $AB = 5$, $SA = 4$. Через вершину A проведена плоскость α , пересекающая ребро SD и удаленная от точек B и D на одинаковое расстояние $5/4$. Найдите длины отрезков, на которые плоскость α делит ребро SD , если известно, что α не параллельна прямой BD .

5. Автомобили "Рено" и "Крайслер" движутся по кольцевой дороге, $1/4$ часть которой проходит по городу. Скорость "Рено" в городе равна $2v$, а за пределами города равна $9v/4$. Скорость "Крайслера" в городе равна v , а за пределами города равна $3v$. Автомобили одновременно въезжают в город. Через какое время один из них совершит обгон другого, если длина городского участка кольцевой дороги равна S ?

В а р и а н т 2

1. Решите уравнение

$$2 \arcsin 2x = \arccos 7x.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{\log_{4x^2-x} 5} \log_5 \left[\frac{25}{4x^2-x} \right] = 1,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x > \operatorname{ctg} 2x$.

3. Числа x и y являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} -x + ay = 2a, \\ ax - y = 3a - 5, \end{cases}$$

где a — параметр. Какое наименьшее значение принимает выражение $x^2 + y^2$? При каком a это происходит?

4. В параллелограмме $ABCD$ угол A тупой, $AD > AB$, $AD = 7$. Точка A' симметрична точке A относительно прямой BD , а точка A'' симметрична точке A' относительно прямой AC и лежит на диагонали BD . Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $BA'' = 0,8BD$.

5. Сфера вписана в правильную треугольную пирамиду $SABC$ (C — вершина), а также вписана в прямую треугольную призму $KLMK'L'M'$, у которой $KL = KM = \sqrt{6}$, а

боковое ребро KK' лежит на прямой AB . Найдите радиус сферы, если известно, что прямая SC параллельна плоскости $LL'M'M$.

В а р и а н т 3

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагонали пересекаются в точке O . Найдите периметр трапеции, если $BO = 7/8$, $OD = 25/8$, $\angle ABD = 90^\circ$.

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{x} \log_5 \left[\frac{10}{3} - 5^{-x} \right] > 1.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 17 \cos 2x - 7 = 21 \sin x \cos 2y, \\ \cos x = \sqrt{3 \sin x \cos y}. \end{cases}$$

4. Основание прямой призмы $ABCA'B'C'$ — равнобедренный треугольник ABC , в котором $AC = CB = 2$, $\angle ACB = 2 \arcsin (4/5)$. Плоскость, перпендикулярная прямой $A'B'$, пересекает ребро AB и $A'B'$ в точках K и L соответственно, причем $AK = (7/16)AB$, $LB' = (7/16)A'B'$. Найдите площадь сечения призмы этой плоскостью.

5. На берегу реки шириной $6l$ вниз по течению на расстоянии l друг от друга расположены пункты $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{100}$. От Π_0 до Π_{100} со скоростью $5v$ и с остановками только в пунктах Π_0, \dots, Π_{100} идут электрички, которые отправляются из Π_0 одна за другой с интервалом времени $2l/(11v)$. Студент, находящийся на противоположном берегу реки напротив Π_0 , отплывает в лодке одновременно с отправлением из Π_0 очередной электрички. Отплыв по прямой до одного из пунктов, студент добирается до Π_{100} в электричке. Скорость течения реки и скорость лодки в стоячей воде равны v . В какой пункт должен плыть студент, чтобы затратить на весь путь до Π_{100} наименьшее время? Найдите все решения. (Временем стоянки электричек можно пренебречь.)

Ф И З И К А

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

1. Шайба, брошенная вдоль наклонной плоскости, скользит по ней, двигаясь вверх, а затем возвращается к месту броска. График зависимости модуля скорости шай-

бы от времени приведен на рисунке 32. Найдите угол наклона плоскости к горизонту.

2. Цилиндрический колокол для подводных работ высотой 2 м опускается вверх дном с борта катера на дно водоема глубиной 3 м. Найдите толщину воздушной подушки, образовавшейся у «потолка» колокола к моменту его касания дна водоема. Температуру считайте постоянной

3. Заряженная частица движется в однородных взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях. В некоторый момент времени ее скорость \vec{v}_0 перпендикулярна

\vec{E} и \vec{B} (рис. 33), при этом выполняется соотношение $E/(v_0 B) < 1$. В те моменты времени, когда скорость частицы направлена противоположно \vec{v}_0 , отношение изменения кинетической энергии частицы к ее начальной кинетической энергии равно β . Определите по этим данным отношение $E/(v_0 B)$.

4. Трапеция $ABCD$ расположена так, что ее параллельные стороны перпендикулярны главной оптической оси тонкой линзы (рис. 34). Линза создает действительное изображение трапеции в виде прямоугольника. Если повернуть трапецию на 180° вокруг стороны AB , то линза создает ее изображение в виде трапеции с теми же самыми углами. С каким увеличением изображается сторона трапеции AB ?

В а р и а н т 2

1. Доска с лежащим на ней бруском находится на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис. 35). Система



Рис. 32

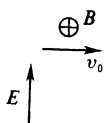


Рис. 33

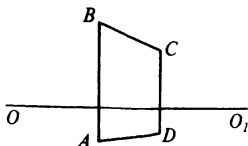


Рис. 34

совершает колебания под действием упругой пружины вдоль прямой с периодом 1 с и максимальным значением скорости 0,5 м/с. При этом доска и брусок неподвижны друг относительно друга. При каких значениях коэффициента трения скольжения между доской и бруском такие колебания возможны?

2. Гелий (He) и водород (H_2) находятся в теплоизолированном цилиндре под поршнем. Объем, занимаемый смесью газов, равен 1 л, давление — 37 атм. При адиабатическом расширении смеси относительное уменьшение температуры составило 75 %. Найдите работу, совершенную при этом смесью газов, если масса водорода в 1,5 раза больше массы гелия. Внутренняя энергия моля гелия равна $U_1 = 3/2 RT$, а водорода — $U_2 = 5/2 RT$, где T — абсолютная температура, R — газовая постоянная.

3. Неподвижная проволочная квадратная рамка находится в однородном магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны плоскости рамки (рис. 36). По рамке скользит без нарушения электрического контакта проволочная перемычка PP' с постоянной скоростью \vec{v} ($\vec{v} \perp PP'$). В тот момент, когда перемычка пересекает центр квадрата, по ней течет ток силой I . Определите величину и направление индукции магнитного поля. Рамка и перемычка выполнены из одного куска проволоки с удельным электрическим сопротивлением ρ и площадью поперечного сечения S .

4. На плоскую поверхность тонкой плосковыпуклой положительной линзы нанесено абсолютно отражающее покрытие. На выпуклую поверхность этой линзы падает узкий пучок импульсного лазерного излучения с энергией 4 Дж и длительностью импульса 10^{-8} с. Падающий пучок распространяется параллельно главной оптической оси

линзы на расстоянии $F/2\sqrt{3}$ от оси (F — фокусное расстояние линзы). Найдите величину средней силы, действующей на линзу со стороны света, если половина энергии лазерного излучения поглощается в линзе. Отражением от поверхности линзы (без покрытия) можно пренебречь.

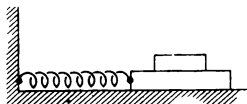


Рис. 35

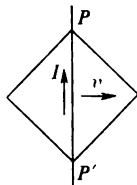


Рис. 36

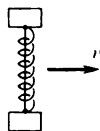


Рис. 37

В а р и а н т 3

1. Два груза массой m каждый связаны нитью (рис. 37). Между грузами вставлена легкая упругая пружина, сжатая на величину x . Система движется со скоростью v вдоль прямой, перпендикулярной ее оси. В некоторый момент нить пережигают, и грузы разлетаются под углом 90° . Найдите коэффициент упругости пружины.

2. Легкая подвижная перегородка делит герметичный теплопроводящий сосуд на две неравные части, в которых находится воздух при атмосферном давлении и комнатной температуре. В меньшую часть сосуда впрыснули легко испаряющуюся жидкость, давление насыщенного пара которой при комнатной температуре равно $3,5$ атм. Спустя некоторое время перегородка перестала двигаться, а жидкость почти вся испарилась. Объем части сосуда, в которой находятся воздух и пары, увеличился при этом вдвое по сравнению с первоначальным. Какую часть объема сосуда составляла вначале его меньшая часть? Объемом, занимаемым жидкостью в начале и в конце опыта, можно пренебречь.

3. Три одинаковые неподвижные металлические пластины расположены в воздухе на равных расстояниях d друг от друга (рис. 38). Площадь каждой из пластин равна S . На пластине 1 находится положительный заряд Q . Пластины 2 и 3 не заряжены и подключены через ключ K к катушке индуктивностью L . Определите максимальное значение тока через катушку после замыкания ключа. Расстояние между пластинами мало по сравнению с их размерами. Омическим сопротивлением катушки можно пренебречь.

4. Математический маятник раскачивается с амплитудой 1 см в плоскости рисунка 39. Равновесное положение нити маятника находится на расстоянии $\sqrt{5}$ см от переднего фокуса тонкой положительной линзы. Расстояние между изображениями маятника, лежащими на главной оптической оси линзы, равно 2 см. Найдите фокусное расстояние линзы

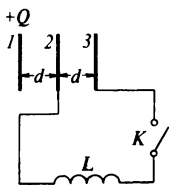


Рис. 38

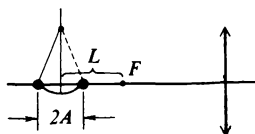


Рис. 39

В а р и а н т 1

1. Упростите выражение для $f(x)$ и найдите $f'(x)$, если

$$f(x) = \left[\frac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{256} - 2^{2/3}} \right]^{-1} - \left[\frac{x^2 - \sqrt[3]{2} x + \sqrt[3]{4}}{x^3 + 2} \right]^{-1} + \\ + 100^{\lg \sqrt{x^2+2}} \left[100^{\lg \sqrt{x}} \right]^{-1}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (\log_2 x - \log_3 y)^{-1} + \log_2 x = 1, \\ \log_2 x \cdot \log_2 (1 - \log_2 3 \cdot \log_y x) \log_2 y^2 = 0. \end{cases}$$

3. Сумма первого, удвоенного второго и утроенного четвертого членов геометрической прогрессии равна 2; ее первый член, знаменатель и второй член образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель и первый член геометрической прогрессии.

4. Найдите корни уравнения

$$(1 + \sqrt{3}) \cos^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{4} = \sin x \left[\sin \frac{16\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{6} \right],$$

принадлежащие области определения функции

$$y = \log_{\pi/4} \left[\frac{x-4\pi}{\pi-2x} \right]$$

5. Основание BC равнобедренной трапеции $ABCD$ и сторона BC ромба $MBCN$ совпадают, причем $BC = a$, $AD = b$ ($a < b < 2a$). Найдите площадь поверхности тела, образованного совместным вращением трапеции и ромба вокруг прямой, содержащей BC , если острый угол трапеции равен 30° , а острый угол ромба равен 60° .

В а р и а н т 2

1. Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{a^2+8} + \sqrt{a-b+1} + (\sqrt{b})^2 - 1}{(\sqrt{a})^2 - \sqrt{a^2+8}} - \frac{\sqrt{b^5 - b^4 - (a^2+a)b^3} - \sqrt{a^2+8+a}}{a+b \sqrt{1-2b^{-1}+9b^{-2}}}$$

2. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{\lg^2 x - 3 \lg x + 3}{\lg x - 1}}$$

3. Два поезда одновременно выехали навстречу друг другу из городов A и B , расстояние между которыми равно 60 км. Поезд, идущий из A в B , проехав 20 км, остановился на 30 минут, затем отправился с прежней скоростью и через 3 минуты встретился с поездом, идущим из B в A . Определите, на каком расстоянии от города A произошла встреча поездов, если известно, что оба поезда прибыли в конечные пункты одновременно

4. Найдите все корни уравнения

$$\sqrt{2 \sin \left[x \left(x - \frac{4}{3} \pi \right) + \frac{4}{9} \pi^2 \right]} - \sqrt{1 - \cos \left(2 - \frac{4}{3} \pi \right)} + 2 \sin \frac{73}{4} \pi = 0,$$

лежащие на отрезке $\left[0; \frac{8}{3} \pi \right]$

5. Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция, длины боковых сторон которой равны 5. Известно, что в указанную трапецию можно вписать окружность и что прямая, соединяющая середины боковых сторон трапеции, делит ее на две части, отношение площадей которых равно $\frac{3}{7}$. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна периметру ее основания.

Ф И З И К А

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

1. Магнитные свойства вещества. Магнитная проницаемость Ферромагнетизм.

2. На рисунке 40 показан график зависимости кинети-

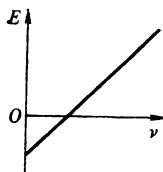


Рис 40

ческой энергии фотоэлектронов от частоты поглощенного света. Определите по графику работу выхода, постоянную Планка и красную границу фотоэффекта.

3. В вагоне поезда, идущего горизонтально со скоростью 20 м/с по закруглению радиусом 200 м , производится взвешивание груза с помощью динамометра, подвешенного к потолку вагона. Масса груза 5 кг . Определите результат взвешивания.

4. Точечный положительный заряд q находится в центре положительно заряженного кольца, радиус которого R и заряд Q . Масса заряда m , кольца 10 т . Заряд незначительно смещают вдоль оси, перпендикулярной плоскости кольца, и система приходит в движение. Какой будет скорость точечного заряда на большом расстоянии от кольца?

5. На железный сердечник намотаны две катушки (рис. 41). Магнитный поток, создаваемый каждой катушкой, не выходит из сердечника и делится поровну в его разветвлениях. При включении катушки 1 в цепь переменного тока с напряжением 60 В напряжение на катушке 2 равно 20 В . Какое напряжение будет на разомкнутых зажимах катушки 1, если катушку 2 включить в цепь переменного тока с напряжением 10 В ?

В а р и а н т 2

1. Свободные электромагнитные колебания в контуре. Превращение энергии в колебательном контуре. Собственная частота колебаний в контуре.

2. Почему легкий незаряженный диэлектрический шарик всегда притягивается к телу, заряженному любым по знаку зарядом?

3. На рисунке 42 представлен замкнутый процесс (цикл), происходящий с идеальным газом. Найдите работу, которую совершает газ за один цикл. Соответствующие значения давлений и объемов считайте заданными.

4. Определите жесткость системы двух пружин при последовательном их соединении. Жесткости пружин 2 кН/м и 6 кН/м .

5. В конце зарядки аккумулятора через него течет ток

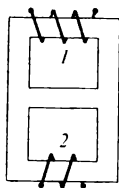


Рис. 41

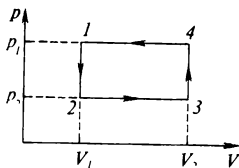


Рис. 42

4 А, при этом напряжение на его клеммах составляет 12,6 В. При разрядке того же аккумулятора током 6 А напряжение составило 11,1 В. Определите максимальную мощность, которую может развить на внешнем сопротивлении такой аккумулятор.

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

В а р и а н т 1

(радиофизический факультет)

1. Решите уравнение

$$8^{4(x^3+8)} - 16^{7(x^2+2x)} = 0.$$

2. Решите неравенство

$$2x - 17 < \sqrt{81 - x^2}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\sin 4x + \cos^2 x = \sin^2 x,$$

удовлетворяющие условию $|x| < 2$.

4. Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна 4. Найдите площадь трапеции, если известно, что длина одной из ее диагоналей равна 5.

5. Найдите все значения параметра a , при которых сумма квадратов корней уравнения

$$2 \log_4 (2x^2 - x + 2a - 4a^2) + \log_{1/2} (x^2 + ax + 2a^2) = 0$$

больше единицы

В а р и а н т 2

(физико-механический факультет)

1. Решите неравенство

$$(-5 + (\lg 103) \operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec}^2 x) \frac{\log_{1/3} (x^2 + x)}{\pi x - 1} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} \left[\frac{2\pi}{3} - x \right] + \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{3} - x \right] = 2 \sin 2x.$$

Выпишите все решения, лежащие в промежутке (2; 3).

3. Найдите область определения функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \log_{1/5} (\log_5 x - \log_{125} (3x - 2))$$

4. Найдите углы треугольника с единичным радиусом вписанной окружности, если известно, что длины его высот — целые числа

5. Найдите положительные a , для которых все различные неотрицательные x , удовлетворяющие уравнению

$$\cos((8a - 3)x) = \cos((14a + 5)x)$$

и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию

В а р и а н т 3

(физико-технический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3y^2 + 6y + 16} + \sqrt{y^2 + 2y} = 2\sqrt{y^2 + 2y + 4}.$$

2. Решите неравенство

$$(4^{-x} + 3 \cdot 2^x)^{\log_7 x - \log_x \frac{1}{7} - 2} \leq 1.$$

3. Числа $1 - \cos 2x$, $\cos x - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \sin^2 x$ являются членами геометрической прогрессии с номерами k , $k + 1$, $k + 2$ соответственно. Найдите все значения x и k , если известно, что 15-й член этой прогрессии равен $27/8$.

4. Найдите площадь плоской фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами:

$$\begin{cases} -y < x < 1, \\ y > 0, \\ \frac{x+y-1}{x^2+y^2-1} \geq 1. \end{cases}$$

5. Длины сторон и диагоналей выпуклого четырехугольника — рациональные числа. Можно ли утверждать, что диагонали разрезают его на четыре треугольника, длины сторон которых также являются рациональными числами? Ответ обоснуйте.

В а р и а н т 4

(факультет технической кибернетики)

1. Решите неравенство

$$(0,25)^{\sqrt{x}} < 2^{3-\sqrt{x}} + 25^{\log_3^{-1} 5}$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2 xy, \\ \lg^2 (x-y) + \lg x \cdot \lg y = 0. \end{cases}$$

3. Постройте график функции $y = f(x)$, если

$$f(x) = \left[\frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9} \left[\frac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27} \right]^{-1} \right]^{0,5} - x^{0,5}.$$

4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$x^2 + 6(\sin a)^{-1/2}x + \frac{9\sqrt{3}}{\cos a} + 36 = 0$$

имеет единственное решение.

5. Две окружности с радиусами r и R ($r < R$) расположены так, что одна из их общих внутренних касательных перпендикулярна к одной из их внешних касательных. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными и еще одной внутренней касательной.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Два тела бросают из одной точки под углом 30° к горизонту с интервалом времени 2 с с одинаковыми скоростями 60 м/с. Через какое время, считая от момента бросания первого тела, оба тела в полете будут находиться на минимальном расстоянии друг от друга? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

2. Шар массой 500 г вращается в вертикальной плоскости в воздухе на нерастяжимой нити длиной 70 см. В некоторый момент времени в самом низком положении шар имел скорость 12 м/с, а спустя четыре оборота — 8 м/с. Найдите среднюю силу сопротивления воздуха движению шара. Массой и диаметром нити можно пренебречь.

3. Открытая карусель вращается с угловой скоростью ω . На карусели на расстоянии r от оси вращения стоит человек. Идет дождь, и капли дождя падают вертикально вниз со скоростью v_0 . В каком направлении человек должен держать зонт, чтобы наилучшим образом укрыться от дождя?

4. Снаряд массой m_1 вылетает из ствола зенитного орудия, стреляющего вертикально вверх, и через время t падает на землю. Масса ствола орудия m_2 , а его длина L . Найдите среднюю мощность выстрела из орудия, считая движение снаряда в стволе равноускоренным. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

5. Мяч, катившийся без скольжения по полу, после упругого удара о стенку отлетел от нее под углом α к горизонту. Чему равен коэффициент трения между мячом и стенкой?

6. В сосуд налиты две несмешивающиеся жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 ; толщины слоев этих жидкостей равны h_1 и h_2 соответственно. С поверхности жидкости в сосуд опускают маленькое обтекаемое тело, которое достигает дна как раз в тот момент, когда его скорость становится равной нулю: Какова плотность материала, из которого сделано тело?*

7. Вертикальный цилиндр, закрытый с обоих торцов, разделен поршнем. По обе стороны поршня находится по одному молу воздуха при температуре 300 К. Отношение объема верхней части цилиндра к объему нижней равно 4. При какой температуре отношение этих объемов будет равно 3?

8. Четыре бусинки, имеющие заряд q и массу m , находятся в вершинах правильного тетраэдра с ребром L . Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы их расположить в один ряд на расстоянии L друг от друга? Какова будет максимальная скорость бусинок, если их предоставить самим себе?

9. Заряд Q равномерно распределен по тонкому диэлектрическому кольцу, которое лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Индукция магнитного поля, перпендикулярного плоскости кольца, меняется от 0 до B_0 . Какую угловую скорость вращения приобретает при этом кольцо? Масса кольца m .

10. В днище судна вделан стеклянный иллюминатор для наблюдения за морскими животными. Диаметр иллюминатора 40 см, что много больше толщины стекла. Определите площадь обзора дна из такого иллюминатора. Показатель преломления воды 1,4, расстояние до дна 5 м.

* Предполагается, что ускоренным движением элементов жидкости следует пренебречь (*Прим. ред.*)

ОТВЕТЫ

МАТЕМАТИКА

Глава 1. Алгебраические уравнения

Рациональные уравнения. 1.1. а) -1 ; 1993; 6) -1 ; 1992/1993. 1.2. 1; $-4/7$. 1.3. $1/3$; $1/2$. 1.4. 0; -3 ; $(-3 \pm \sqrt{21})/2$. Заменой $y = x^2 + 3x - 1$ приведите уравнение к виду $y^2 = y + 2$. 1.5. 1; 9; $5 \pm \sqrt{37}$. Замена $y = x^2 - 10x$. 1.6. $1/2$; 2; $(-7 \pm \sqrt{33})/4$. Замена $y = x + 1/x$. 1.7. -1 ; 3; $3 \pm 2\sqrt{2}$. 1.8. $-2/5$; $-1/2$. 1.9. а) 1; 6) $(3 \pm \sqrt{5})/2$; $(-5 \pm \sqrt{21})/2$. Замена $y = x + 1/x$. 1.10. 1. После замены $y = x + 1/x$ уравнение приводится к виду $(2y + 1)/(3y - 1) = (2y - 3)(y - 1)$. 1.11. 0; 1. После замены $x = y + 1/2$ уравнение приводится к биквадратному. 1.12. -8 ; 4. Левая часть приводится к виду $(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x - 21) = 297$, после чего полагаем $y = x^2 + 4x - 5$. 1.13. а) $2 + \sqrt{2}$; $(-1 \pm \sqrt{13})/2$. Замена $y = (x^2 - 3x + 1)/(x - 1)$; 6) $3 \pm \sqrt{7}$; $(-1 \pm \sqrt{21})/2$. Заметьте, что $x^2 - 4 = x^2 - 5x + 1 + 5(x - 1)$. 1.14. -4 ; 2. 1.15. -1 ; 3. 1.16. ± 2 ; $\pm \sqrt{7/11}$. 1.17. -2 ; 6; $3 \pm \sqrt{21}$. Замена $y = x/3 - 4/x$. 1.18. а) $-1 \pm \sqrt{3}$; $-2 \pm \sqrt{2}$. Уравнение сводится к системе: $y = x^2 + 3x - 2$; $y^2 + 3y - 2 = x$; 6) -2 ; -1 , $(-1 \pm \sqrt{5})/2$. Преобразуйте уравнение к виду $(x^2 + 2x - 1)^2 + 2(x^2 + 2x - 1) - 1 = x$. 1.19. $11/2$; $(33 \pm \sqrt{57})/3$. 1.20. 0. 1.21. -1 , $1/3$; 3.

Иррациональные уравнения. 1.22. $-3/4$. 1.23. \emptyset . 1.24. $49/4$. 1.25. 3. 1.26. $14/3$. 1.27. 3. 1.28. $7/6$. 1.29. 3. 1.30. а) -3 ; $\sqrt{10}$; 6) -1 ; 2. 1.31. 1. 1.32. 1; 5. 1.33. а) $(5 \pm \sqrt{5})/2$; 6) $(5 + \sqrt{5})/2$. 1.34. 3. 1.35.

$10 + 2\sqrt{5}$. 1.36. 14. 1.37. а) 9; 6) $(\sqrt{37} - 13)/22$. 1.38. $\pm 2\sqrt{2}$.
 1.39. -6; 1. Выполните замену $y = \sqrt{x^2 + 5x - 2}$. 1.40. ± 1 . 1.41. $1/2$.
 1.42. 0; -1. 1.43. а) 15. Замена $y = \sqrt{2x - 5}$; 6) $[-4; 0]$. 1.44. $(-5 + \sqrt{13})/2$. 1.45. 8. 1.46. 2. 1.47. а) 5; 6) 7. 1.48. а) 1; 6) -1. 1.49.
 5. Левая часть уравнения равна $(x - 5)^2 / (\sqrt{x^2 - 9x + 24} + \sqrt{x^2 - 59x + 149})$. 1.50. а) -1; 5; 6) -1; 3. Разложите на множители
 квадратные трехчлены под знаком корня. 1.51. $1 - 3\sqrt{5/5}$. 1.52.
 $17/4$. Замена $y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 2}$. 1.53. 1; $(1 + \sqrt{5})/2$. 1.54.
 $-1/\sqrt{2}$; $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$. После возведения в квадрат выполните замену
 $y = 2x\sqrt{1 - x^2}$. 1.55. 1; 2. Заменой $y = x/\sqrt{3x - 2}$ уравнение сводится
 к квадратному. 1.56. а) 2; 6) 2. Сравните наибольшее и наименьшее
 значения левой и правой частей. Наибольшее значение функции
 $y = \sqrt{a + x} + \sqrt{b - x}$ достигается при $x = (a + b)/2$. 1.57. 8. Левая
 часть монотонно возрастает. 1.58. -1; $-1/2$; $-2/3$. Воспользуйтесь тем,
 что $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$. 1.59. 4416. 1.60. 16; 81. За-
 меной $u = 4\sqrt{97 - x}$, $v = 4\sqrt{x}$ уравнение приводится к системе:
 $u^4 + v^4 = 97$; $u + v = 5$. 1.61. 10. Пусть $y = \sqrt{35 - 2x}$. Исходное
 уравнение приводится к виду $2\sqrt{35 - 2y} = 35 - y^2$. Положив здесь
 $a = 35$, получим после возведения в квадрат уравнение $a^2 - 2a(y^2 + 2) + y^4 + 8y = 0$, которое следует решить относительно a . 1.62.
 а) $-1/3$. Положив $u = 2x + 1$, $v = -x$, приведем уравнение к виду
 $f(u) = f(v)$, где $f(t) = t(1 + \sqrt{t^2 + 7})$ — возрастающая функция. По-
 этому $u = v$; 6) $-1/5$.
Уравнения с модулем. 1.63. а) 1; -3; 6) 1; -4; в) -5; 1; г) $[-1; 2]$; д)
 -4 ; $[-1; 0]$. 1.64. -2; 3; $(1 \pm \sqrt{17})/2$. 1.65. $1/2$; $(-1 \pm \sqrt{2})/2$. 1.66.
 ± 1 ; ± 2 . 1.67. $-(1 + \sqrt{5})/2$; $(3 - \sqrt{5})/2$. Уравнение $|u| = v$ равно-
 сильно системе $u = \pm v$, $v \geq 0$. 1.68. $\pm \sqrt{7/3}$. 1.69. $-1 - \sqrt{5}$, 2. 1.70.
 ± 2 ; $(-1 \pm \sqrt{17})/4$. 1.71. 1; 3. 1.72. а) $(-3 - \sqrt{33})/6$, $(-3 \pm \sqrt{33})/4$;
 6) $(-3 \pm \sqrt{33})/6$; $(-3 \pm \sqrt{33})/4$; 0. 1.73. $[-5/2; 1]$. 1.74. $-3\sqrt{3}$; 0.
 1.75. $1/6$; $1/2$, $3/2$. 1.76. а) 3. Заметьте, что $\sqrt{5} < 1 + 7\sqrt{2/8}$; 6) 2.

1.77. а) -4; 2; 6) -1, 5. 1.78. 1/2. 1.79. а) $x \leq -1$; $x = 1/5$; 6) $x \leq -5/4$; $x = -1/4$.

Системы алгебраических уравнений. 1.80. (1; 1). 1.81. (3/2; 0); (3/4; -3/2). 1.82. (2; 1); (-22/7; 25/7). 1.83. (1; -6); (6; -1). 1.84. (0; 0);

(1; 1). 1.85. (1; 2); (2; 1); $((4 \pm \sqrt{10})/2; (4 \mp \sqrt{10})/2)$. 1.86. (1; 0); (1/4, 3/4); (-1/6; -7/6); (-4/12; -5/12). 1.87. (2; 1); (-2; -1). 1.88.

$((\sqrt{5} \pm 1)/2; (\sqrt{5} \mp 1)/2); ((-\sqrt{5} \pm 1)/2; (-\sqrt{5} \mp 1)/2)$. 1.89. а) $(\pm 1$;

$\pm 1)$, $(\mp 3\sqrt{7/7}; \pm \sqrt{7/7})$; 6) $(\pm; \pm 1)$; $(\pm 3\sqrt{7/7}; \pm \sqrt{7/7})$. 1.90. (1; -1); (1; 2). 1.91. (8; 8/5); (-4; 4/7). 1.92. $(\pm 2; \pm 1)$. 1.93. (4; ± 3). 1.94. (1; 1); (1; -2); (-2; 1). 1.95. (2; 1); (1; 2). 1.96. (2; 1); (1; 2). 1.97. (1; 2);

(2; 1). 1.98. (-2; -5); (5; 2); $(5 \pm 2\sqrt{7}; -5 \pm 2\sqrt{7})$. 1.99. (2; 1); (1; 2).

1.100. (2; 1). 1.101. (1; 2); (2; 1); $((5 \pm 2\sqrt{6})/2; (5 \mp 2\sqrt{6})/2)$. 1.102. (1; 2); (3; 1). 1.103. (-46/25; 1); (-41/25; 2/3). 1.104. (1; 9); (9; 1). 1.105.

а) (0; 1); (2; -1); 6) (-1; 0); (1; 2). 1.106. $(-(1 + \sqrt{3})/2; 2)$;

$((\sqrt{3} - 1)/2; 2)$. Уравнение $2x^2 + yx - 1 = 0$ при $z = x$ превращается в первое уравнение системы, а при $z = -3x/(2(x-1)^2)$ - во второе. Поэтому либо $-3x/(2(x-1)^2) = x$, либо $x(-3x/(2(x-1)^2)) = -1/2$. 1.107. (1; 64); (64; 1). 1.108. (4,1). 1.109. (7/5; 0); (2; 1).

Свойства корней квадратного уравнения. Алгебраические задачи с параметрами. 1.110. а) $9x^2 + 18x + 1 = 0$; 6) $9x^2 - 36x + 4 = 0$;

в) $x^2 - 18x + 9 = 0$; г) $x^2 + 18x + 9 = 0$. 1.111. ± 3 . 1.112. а) 2; 6) 3. 1.113. 4. 1.114. $q = 2p^2 - 1$, $p^2 \geq q$. 1.115. 0; 1; 3. При $a \neq 0$

числа $3/a$ и $3/a - a$ должны быть целыми. 1.116. 1; 2. 1.117. а) (0; 0); (1; -2); (-1/2; -1/2). Если корнями являются числа p и q и только они, то $p + q = -p$, $pq = q$. При $p = q$ получаем еще уравнение $2q^2 + q = 0$; 6) (0; 0); (-3; 2); (-15/4; -9/4). 1.118. а) $a > 3/2$;

б) $a < -4$. 1.119. $-\sqrt{2} < a < 0$; $1 < a < \sqrt{2}$. Число a лежит между корнями квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ тогда и только

тогда, когда $a f(a) < 0$. 1.120. $1 < a \leq (2 + \sqrt{6})/2$. Корни уравнения $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) больше числа a тогда и только тогда, когда $b^2 - 4ac \geq 0$; $-b/(2a) > a$, $a f(a) > 0$. 1.121. $a = b = 0$;

$a = -64$, $b = 8$; $0 < a < 1/4$, $-2\sqrt[3]{4} < b < 0$. 1.122. $u = 6$, $v = 4$. Если $\alpha \neq \beta$ - корни уравнений $p(x) = x^3 + x^2 - 8x - u = 0$ и $q(x) = x^3 - 6x - v$, то они также удовлетворяют уравнению $r(x) = p(x) - q(x) = x^2 - 2x - u + v = 0$, уравнению $s(x) = q(x) - xp(x) = 2x^2 + (u - v - 6)x - v = 0$ и, наконец, уравнению $2r(x) - s(x) = (u - v - 2)x - 3v + 2u = 0$, но это значит, что $u - v = 2$, $2u - 3v = 0$. 1.123. (3; 3); (-3; -3); $(2\sqrt{3}; \sqrt{3})$; $(-2\sqrt{3}; -\sqrt{3})$. 1.124.

[3, 7/2]. Выполнив замену $t = x^2/(x+1)$ и решив полученное квадратное уравнение, приходим к задаче о расположении корней квадратных

уравнений $x^2 = (3 - 2a)(x + 1)$ и $x^2 = -(a + 1)(x + 1)$. **1.125.** $(0; 5/2)$. Множество M задается системой неравенств $|a| < 1$; $(3a - 4b + 15)(7a - 24b + 35) < 0$. Это трапеция с вершинами в точках $A(1; 9/2)$, $B(1; 7/4)$, $C(-1; 7/6)$, $D(-1; 3)$, причем $AB + CD = AD + BC$. Осталось воспользоваться тем, что центр вписанной окружности лежит на прямой $a = 0$, а прямая AD пересекает ось Oa в точке $(0; 15/4)$. **1.126.** $x = -1/2$ при $a = 3/16$; $x = -1/4$ при $a = 297/128$; $x_{1,2} =$

$= \pm\sqrt{11}$, $x_3 = -2$ при $a = 3/2$. Сложив данные уравнения, получим после сокращения на $x \neq 0$ уравнение

$$33x^3 + 66x^2 + (21 - 16a)x - (2a + 3) = 0. \quad (*)$$

Вычитая из первого уравнения удвоенное второе, получим уравнение

$$-33x^2 - (16a + 42)x^2 + (4a - 3)x + 6 = 0. \quad (**)$$

Складывая уравнения $(*)$ и $(**)$, получаем после преобразований уравнение $(3 - 2a)(8x^2 + 6x + 1) = 0$. **1.127.** $0 < a < 4$; $4 < a$. Исходное уравнение равносильно совокупности $x^2 - 2x = 3$, $x^2 - 2x = a - 1$.

1.128. а) $x_1 = -1$; $x_2 = (n + 1)/(n - 1)$ при $n \neq 0$, $n \neq 1$; $x = -1$ при $n = 1$; б) $x_1 = -2a - 1$, $x_2 = 3$ при $a \neq 1/3, 3/2, -3, 2$; $x = 3$ при $a = 1/3, 2$; \emptyset при $a = 3/2$; $x = -7$ при $a = -3$; в) $x_1 = 1$, $x_2 = 5a$ при $a \neq -1, 0, 1/5, 2, 11$; $x = -5$ при $a = -1$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ при $a = 0$; $x = 1$ при $a = 1/5$ и $a = 11$; $x = 10$ при $a = 2$; г) $x_1 = -1$, $x_2 = (4a + 3)/8$ при $a \neq -3, -11/4, -9/4, -1/4, 1$; $x = -1$ при $a = -11/4, -9/4, -1/4$; $x = -9/8$ при $a = -3$; $x = 7/8$ при $a = 1$. Во всех случаях уравнение сводится к квадратному. Нужно проследить, при каких значениях параметров знаменатели обращаются в нуль. **1.129.**

а) $4/3 \leq a \leq 2$; б) $-3 \leq a \leq -23/9$. **1.130.** а) $x = 4$ при $a < -1$; $x \geq 4$ при $a = -1$; $x_1 = 4$, $x_2 = (4a - 8)/(a + 1)$ при $-1 < a < 1$; $-2 \leq x \leq 4$ при $a = 1$; $x = 4$ при $a > 1$; б) $x = 2$ при $a < 1$; $x \geq 2$ при $a = -1$; $x_1 = 2$, $x_2 = (2a - 4)/(a + 1)$ при $-1 < a < 1$; $-1 \leq x \leq 2$ при $a = 1$; $x = 2$ при $a > 1$. **1.131.** а) $x = (a + 1)^2/2$ при $-1 \leq a \leq 1$; \emptyset при $|a| > 1$; б) $x = (a + 1)^2/2$ при $-1 < a < 1$; \emptyset при $|a| \geq 1$.

1.132. $x = 1/2$ при $|a| = \sqrt{2}/2$; $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{2a^2 - 1})/2$ при $\sqrt{2}/2 < |a| \leq$

≤ 1 ; $x = (1 + \sqrt{2a^2 - 1})/2$ при $|a| > 1$; \emptyset при $|a| < \sqrt{2}/2$. **1.133.** а) $x = 2p - 1$ при $p < 0$; $x = 0$ при $p = 0$, $p = 1/2$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2p - 1$ при $0 < p < 1/2$ и $1/2 < p \leq 3/4$; $x = 0$ при $p > 3/4$. Уравнение равносильно системе $x^2 - x + p^2/(x - 1)^2 = (p/(x + 1) - x)^2$, $p/(x + 1) \geq x$; б) $x = 1 - 4p$ при $p < 0$; $x = 0$ при $p = 0$, $p = 1/4$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1 - 4p$ при $0 < p \leq 1/4$ и $1/4 < p \leq 9/32$; $x = 0$ при $p > 9/32$.

1.134. а) \emptyset при $a < \sqrt{3}/2$; $x = 5/2$ при $a = \sqrt{3}/2$; $x_{1,2} = 3a^2 - 2 \pm$

$\pm 2a\sqrt{2a^2 - 3}$ при $\sqrt{3}/2 < a \leq \sqrt{3}$; $x = 3a^2 - 2 + 2a\sqrt{2a^2 - 3}$ при $a >$

$> \sqrt{3}$. Заменой $y = \sqrt{x - 1}$ уравнение после возведения в квадрат приводится к системе $y^2 - 2ay + 3 - a^2 = 0$, $y \geq 0$, $a + y \geq 0$. Можно сразу заметить, что $a > 0$, так как $2x + 1 > x - 1$ при всех

$x \geq 1$; б) \emptyset при $a > 6$; $x = 5$ при $a = 6$; $x_{1,2} = 11 - a \pm 4\sqrt{6 - a}$ при

$2 \leq a < 6$; $x = 11 - a + 4\sqrt{6-a}$ при $a < 2$; в) \emptyset при $a > 7/2$; $x = 15/2$ при $a = 7/2$; $x_{1,2} = 11 - a \pm 4\sqrt{7-2a}$ при $3/2 \leq a < 7/2$; $x = 11 - a + 4\sqrt{7-2a}$ при $a < 3/2$; г) \emptyset при $a > 8/3$; $x = 20/3$ при $a = 8/3$; $x_{1,2} = 12 - 2a \pm 4\sqrt{8-3a}$ при $4/3 \leq a < 8/3$; $x = 12 - 2a + 4\sqrt{8-3a}$ при $a < 4/3$; д) \emptyset при $a < -3/8$ и $0 < a < 3/8$; $x = 12a^2 - 2a + 4a\sqrt{8a^2-3a}$ при $-3/8 \leq a \leq 0$ и $a > 3/4$; $x_{1,2} = 12a^2 - 2a \pm 4a\sqrt{8a^2-3a}$ при $3/8 < a \leq 3/4$; $x = 15/16$ при $a = 3/8$. Замена $y = \sqrt{x-a}$. **1.135.** 1 - с; -с - 63. Подстановка $y = \sqrt[3]{x+c-1}$. **1.136.** а) $5a/2$ при $a \geq 0$; б) 0; $3a/4$ при $a > 0$; 0 при $a = 0$; \emptyset при $a < 0$. **1.137.** а) $x_1 = -3 + \sqrt{a^2+4a+5}$, $x_2 = -3 - \sqrt{a^2-6a+10}$ при $a < -2$; $x_1 = 1 - \sqrt{a^2-2a+5}$, $x_2 = 1 - \sqrt{a^2+4a+8}$ при $-2 \leq a < -1/2$; $x = -3/2$ при $a = -1/2$; $x_1 = 1 - \sqrt{a^2-2a+5}$, $x_2 = 1 - \sqrt{a^2+4a+8}$ при $-1/2 < a \leq 1$; $x_1 = 1 + \sqrt{a^2-2a+5}$, $x_2 = 1 - \sqrt{a^2+4a+8}$ при $a > 1$. Здесь удобно сделать замену $y = (x-3)\sqrt{(x+1)/(x+3)}$. Тогда $y^2 = (x-3)(x+1)$, и уравнение сводится к квадратному: $y^2 + 3y - (a-1)(a+2) = 0$; б) $x_1 = -3 + \sqrt{a^2+4a+5}$, $x_2 = -3 - \sqrt{a^2-6a+10}$ при $a < -2$; $x_1 = -3 - \sqrt{a^2+4a+5}$, $x_2 = -3 - \sqrt{a^2-6a+10}$ при $-2 \leq a < 1/2$; $x = -3 - \sqrt{29}/2$ при $a = 1/2$; $x_1 = -3 - \sqrt{a^2+4a+5}$, $x_2 = -3 - \sqrt{a^2-6a+10}$ при $1/2 < a \leq 5$; $x_1 = -3 - \sqrt{a^2+4a+5}$, $x_2 = -3 + \sqrt{a^2-6a+10}$ при $a > 3$. **1.138.** а) $a = 5$; б) $(\alpha; \beta) = (6; 2); (-2; -6)$. **1.139.** $a = 2$. **1.140.** $a = -5/4$; $-1 < a \leq 5$. После подстановки во второе уравнение $\sqrt{y} = 1 - x$ приходим к системе $a + 2 + x = (a - x)^2/2$, $x \leq 1$, которая должна иметь единственное решение. **1.141.** а) (1; -1); б) $a = 2$; $a < 1$; в) $a \geq 0$. **1.142.** $-1/4 \leq k \leq 1/4$. **1.143.** а) $-2 \leq b \leq 2\sqrt{2}$; б) $a = -\sqrt{2}$; $0 < a < 1$; в) $b = -2$; г) $1 < a < \sqrt{2}$. Воспользуйтесь графическими соображениями. Можно также, выполнив замену $t = |y|$, исследовать соответствующее квадратное уравнение. **1.144.** а) 1; 3; 11/12. Из первого уравнения следует, что $x = -(3 + 2y)/y$, $y \neq 0$. После подстановки во второе уравнение системы получаем уравнение относительно y , которое должно иметь только один корень, не равный нулю; б) 1; $-1/2$; $(-7 \pm 4\sqrt{2})/2$. **1.145.** 0; $\pm \sqrt{2}/4$. Положив $u = x + 1$, $v = y - 3$, приходим к системе

$$\begin{cases} bu^2 + v + 2b = 0, \\ u + bv^2 + 2b = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Если $(u_0; v_0)$ - решение системы (*), то $(v_0; u_0)$ - также ее решение. Поэтому, если решение системы (*) единственно, то $u_0 = v_0$. Поэтому

уравнение $bu^2 + u + b = 0$ должно иметь единственное решение, что

имеет место при $b = 0$ и $b = \pm \sqrt{2}/4$. Осталось проверить, что найденные значения b удовлетворяют условию. **1.146.** а) $a = -4$, b — любое; $a = 4$, $b = 2$. Из первого уравнения следует, что либо $y = 1 - x$, либо $y = x + a$. Подставляя эти выражения во второе уравнение, получаем два уравнения относительно x , причем по крайней мере одно из них должно иметь не меньше трех корней; б) a — любое, $b = 2$; $a = \pm 1$,

$b = -2$. **1.147.** а) $2/3 - \sqrt{2} \leq a \leq 2/3 + \sqrt{2}$. Вычтите из второго уравнения первое, а затем заменой $u = 3x - y + 2$, $v = 2x + 3y$ приведите систему к виду

$$\begin{cases} u^2 = 3v + 1, \\ v^2 + (5 - 2a)v + a^2 - 2a = 0. \end{cases}$$

Для разрешимости последней системы необходимо и достаточно, чтобы

второе уравнение имело корень $v \geq -1/3$; б) $5/6 - \sqrt{7} \leq a \leq 5/6 + \sqrt{7}$. **1.148.** а) $\alpha < -10$, $\alpha > 1/2$. При $y \geq -2$ выражаем из второго уравнения x через y и подстановкой в первое уравнение получаем уравнение относительно y , которое должно иметь хотя бы один корень $y \geq -2$. Аналогично поступаем при $y < -2$; б) $\alpha < -1$, $\alpha > 1$. **1.149.**

а) $1/16$; $1/128$. Заменой $u = \sqrt{5|x|}$, $v = \sqrt{|y+3|}$ приводим систему к виду

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^4 + v^4 = 16a. \end{cases}$$

Если $(u_0; v_0)$ — решение этой системы, причем $u_0 > 0$, $v_0 > 0$, $u_0 \neq v_0$, то $(v_0; u_0)$ — тоже решение и исходная система имеет не меньше 8-ми решений. Следовательно, либо $u_0 = v_0 > 0$, либо $u_0 = 0$, $v_0 = 1$. В первом случае $u = v = 1/2$, $a = 1/128$, во втором $a = 1/16$. Осталось проверить, что найденные значения удовлетворяют условию; б) $-1/4$; $-1/32$. **1.150.** а) -2 ; -1 . При $a = -2$ обе системы не имеют решений. При $a \neq -2$ первая система имеет одно решение. Поэтому и вторая система тоже должна иметь одно решение. Но если пара $(x_0; y_0)$ — решение второй системы, то $(x_0; -y_0)$ — также решение. Отсюда следует, что $y_0 = 0$. Подставляя $y = 0$ в первую систему, находим для a два значения $a = 1$ и $a = -1$, из которых условию удовлетворяет лишь второе; б) 2 ; 3 . **1.151.** а) $-1/2 \leq a \leq 1/4$. Система является линейной относительно x и y . Исключая из нее y , получаем $(2b^2 + b - 1)x = ab - z^2 - z$. Если $2b^2 + b - 1 \neq 0$, то x и y определяются однозначно при любых a и z . Если же $b = -1$ либо $b = 1/2$, должно выполняться равенство $z^2 + z - ab = 0$. Т. е. для существования решений необходимо, чтобы оба уравнения $z^2 + z + a = 0$ и $2z^2 + 2z - a = 0$ имели корни, б) $-1/2 \leq a \leq 2/3$. **1.152.** а) $(7; 6; 6)$. Система является линейной относительно $p = 13 - y - z$, $q = yz$. Решая ее, получаем $p = 8 - x$, $q = 5x + 1$, или $y + z = 5 + x$,

$yz = 5x + 1$. Последняя система имеет решение $(y; z)$ лишь тогда, когда $(5 + x)^2 - 4(5x + 1) \geq 0$, т. е. при $x \leq -3$ и $x \geq 7$. Учитывая ограничения, получаем $x = 7$, $y = z = 6$; 6) $(5; 5; 5)$.

Глава 2. Алгебраические неравенства

Рациональные неравенства.

- 2.1. а) $[1; 1993]$; б) $(-\infty; -1) \cup (1993/997; +\infty)$. 2.2. а) $((-1 - \sqrt{11})/2; -1) \cup (0; (-1 + \sqrt{11})/2)$; б) $x = 1 \pm \sqrt{2}$; в) $x \neq 3 \pm \sqrt{11}$. Замена $y = (x - 3)^2$; г) $((1 - \sqrt{5})/2; (1 + \sqrt{5})/2)$. Замена $y = x^2 - x$. 2.3. а) $(-\infty; -2] \cup [-5/3; +\infty)$; б) $(-\infty; -2 - \sqrt{2}) \cup (-1; -2 + \sqrt{2})$; в) $(-\infty; -2] \cup (-1; 1]$; г) $(0; 1/3] \cup (1; +\infty)$; д) $(-2; (3 - \sqrt{17})/2) \cup (0; 2) \cup ((3 + \sqrt{17})/2; +\infty)$; е) $(-3; -1) \cup \{1\} \cup (2; +\infty)$. 2.4. $(-\infty; \sqrt{3}] \cup ((-1 - \sqrt{5})/2; 0] \cup ((-1 + \sqrt{5})/2; \sqrt{3})$. 2.5. $[-4; -3) \cup [-3/2; 0) \cup [-1; +\infty)$. Разложите левую часть на множители. 2.6. $(-\infty; -(1 + \sqrt{17})/4) \cup [-1; (1 - \sqrt{37})/6) \cup [1 - \sqrt{2}; 0] \cup [1; (1 + \sqrt{37})/6) \cup (1 + \sqrt{2}; +\infty)$. Заменой $y = x - 1/x$ при $x \neq 0$ ($x = 0$ — решение!) неравенство приводится к виду $(y - 1)/(2y + 1) \geq 1/(3y - 1)$. 2.7. $(-6; 6(1 - \sqrt{26})/5) \cup [0; 6) \cup (6(1 + \sqrt{26})/5; 9) \cup (9; +\infty)$. Равенство

$$\frac{2x^2+72}{x^2-36} = \frac{x+6}{x-6} + \frac{x-6}{x+6}$$

позволяет переписать исходное неравенство так:

$$\frac{x+6}{x-6} \left[\left(\frac{x-4}{x+4} \right)^2 - 1 \right] + \frac{x-6}{x+6} \left[\left(\frac{x+9}{x-9} \right)^2 - 1 \right] > 0.$$

Осталось разложить на множители выражения в скобках, после чего разложение левой части на линейные множители труда не представляет.

Неравенства с модулем.

- 2.8. а) $(0; 2)$; б) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$; в) $(-2/7; -2/5)$; г) $(-\infty; 0)$. 2.9. а) $(-\infty; -6) \cup (2/3; +\infty)$; б) $[-1; 1]$; в) $(-\infty; -4] \cup [-1; +\infty)$; г) $(-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$; д) $(1/2; +\infty)$. 2.10. а) $[-29/9; 1/5]$; б) $[-1; 0]$. 2.11. а) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; б) $(0; 3/2) \cup (3/2; 6)$. 2.12. а) $(4; 6) \cup (6; 8)$; б) $(-\infty; 2) \cup \{3\} \cup (4; +\infty)$; в) $(-\infty; -199) \cup (-66; 200)$. 2.13. а) $(2; 8/3) \cup (6; 8)$; б) $[-1; 3]$. 2.14. а) $(-6; 6)$; б) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$. 2.15. а) $[4 - \sqrt{11}; 1]$; б) $x = -1$. 2.16. а) $[-1 - \sqrt{5}; -2] \cup [-2; -1 + \sqrt{5}]$; б) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$; в) $(-\infty; -1] \cup (-1; 0) \cup (1; +\infty)$; г) $[-5/3; 2/3] \cup [6/7; 4]$. В задачах 2.16 и

2.17 удобно пользоваться следующими свойствами неравенств: 1) $|u| \leq v \iff -v \leq u \leq v$; 2) $|u| > v \iff u > v$ или $u < -v$; 3) $|u| < |v| \iff u^2 < v^2 \iff (u-v)(u+v) < 0$. **2.17.** а) $[1; +\infty)$; б) $\left[-3 + \sqrt{17}\right]/2; -3/2] \cup \left[0; \left[-3 + \sqrt{17}\right]/2\right] \cup [1; +\infty)$; в) $(-\infty; 1]$. См. указание к предыдущей задаче. **2.18.** а) $(-\infty; -3] \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; б) $(-\infty; -1) \cup [-1/3; 1) \cup (1; +\infty)$.

Иррациональные неравенства. **2.19.** а) $[-1; 1/3]$; б) $[-1/2; +\infty)$; в) \emptyset .

2.20. а) $[-2; 2]$; б) $\left[-\infty; \left[-1 + \sqrt{5}\right]/2\right]$; в) $[5; +\infty)$; г) $(-\infty; -1/2)$.

2.21. а) $(22; +\infty)$; б) $(-\infty; -3] \cup (22; +\infty)$; в) $(0; 1] \cup \left[5/2; 7 + 2\sqrt{5}\right]$;

г) $\left[-9; \left[34 + 2\sqrt{29}\right]/5\right]$; д) $(-\infty; -17/2] \cup \left[\left[-9 + \sqrt{185}\right]/2; +\infty\right]$.

2.22. $\{0\} \cup (1; +\infty)$. **2.23.** а) $(-1; 3]$; б) $(-\infty; 2) \cup (3; 4]$; в) $[-2; -1) \cup$

$\left[\left[-1 + \sqrt{7}\right]/2; 2\right]$; г) $(-\infty, -5) \cup (-4, 1; -4] \cup [4; +\infty)$. **2.24.** а) $(-\infty; -7) \cup (-5; -3] \cup [2; +\infty)$; б) $(6; 8]$. **2.25.** а) $(-\infty; 7) \cup \{10\}$; б)

$\{3/2\} \cup [8; +\infty)$; в) $[-3/2; -1) \cup (1; 2]$. **2.26.** $\left[2; 4\sqrt{3/3}\right]$. Неравенство

равносильно системе $x > 1$, $x \leq 4\sqrt{3/3}$, $(x-2)(x^3 + 4x + 8) > 0$. Вторым множителем в последнем неравенстве положителен при $x > 0$. **2.27.**

а) $\{-3\} \cup [-2; 4]$; б) $[-2; -2/3) \cup (1/2; 3]$. **2.28.** а) $[4; 5) \cup (8; +\infty)$;

б) $[10 + 4\sqrt{5}; +\infty)$; в) $\left[8 + \sqrt{7/2}; 10\right]$; г) $[0; 4)$. **2.29.** а) $[5/2; 3]$;

б) $[-1/3; 1)$. **2.30.** а) $\left[-\left[1 + \sqrt{13}\right]/6; \left[-1 + \sqrt{13}\right]/6\right]$; б) $(-2; -1] \cup$

$[-2/3; 1/3]$. **2.31.** $\left[-9/2; -\sqrt{2-3/2}\right]$. **2.32.** $[-2; -1/2) \cup (1; 7]$. **2.33.**

а) $\left[-\left[3 + \sqrt{5}\right]/2; 1\right]$; б) $\left[\left[-5 + \sqrt{13}\right]/2; 1\right]$; в) $[-20; \left[-15 + \sqrt{13}\right]/2]$; г) $\left[-\sqrt{12 + \sqrt{145}}; -2\sqrt{6}\right] \cup (7; +\infty)$. **2.34.** а) $(2; +\infty)$;

б) $[1; 5/4] \cup [53/4; +\infty)$. Заменой $y = \sqrt{x-1}$, т. е. $x = y^2 + 1$, уравнение приводится к виду $|y-3| + |y-1| \geq 3$; в) $\{1\} \cup [113/49; +\infty)$.

2.35. а) $[-7; -6 + 2\sqrt{5-2}]$. После замены $y = \sqrt{x+7} - \sqrt{x-5}$ неравенство превращается в квадратное: $y < 1 + (2 - y^2)/2$; б)

$[-5; -4 + 2\sqrt{5-2}]$. **2.36.** а) $\left[1; \left[1 + \sqrt{5}\right]/2\right] \cup \left[\left[1 + \sqrt{5}\right]/2; +\infty\right]$;

б) $\left[3; \left[1 + \sqrt{37}\right]/2\right] \cup \left[\left[1 + \sqrt{37}\right]/2; +\infty\right]$.

Перепишем неравенство так: $\sqrt{x-9/x} < x-3\sqrt{1-1/x}$, получаем после

возведения в квадрат ($x \geq 3$) неравенство $x^2 - x - 6\sqrt{x^2 - x + 9} > 0$, т. е.

$\left[\sqrt{x^2 - x - 3}\right]^2 > 0$. **2.37.** а) $x = 5$. Пусть $u = \sqrt{x-1}$, $v = x-3$. Не-

равенство принимает вид $u + v \geq \sqrt{2u^2 + 2v^2}$, что эквивалентно системе

$$u + v \geq 0, \quad (u - v)^2 \leq 0, \quad \text{т. е.} \quad u = v, \quad u \geq 0; \quad 6) \quad \left[1/2; 7 - \sqrt{40}\right] \cup$$

$$\cup \left[7 - \sqrt{40}; 7 + \sqrt{40}\right] \cup \left[7 + \sqrt{40}; +\infty\right]; \quad \text{в)} \quad x = \pm 3. \quad 2.38. \quad \text{а)}$$

$$\left[\left[27 - 4\sqrt{66}\right]/9; \left[8 - \sqrt{85}\right]/3\right] \cup \left[\left[17 + \sqrt{349}\right]/6; \left[27 + 4\sqrt{66}\right]/9\right]. \quad \text{Если} \quad x = \sqrt{9v^2 - 48v - 21}, \quad y = \sqrt{9v^2 - 51v - 15}, \quad \text{то} \\ x^2 - y^2 = 3v - 6 \quad \text{и неравенство принимает вид} \quad x + y \leq |x - y|(x + y), \quad \text{т. е.} \\ |x - y| \geq 1; \quad 6) \quad \left[\left[3 - \sqrt{264}\right]/3; \left[1 - \sqrt{85}\right]/2\right] \cup \left[\left[3 + \sqrt{349}\right]/4; \left[3 + \sqrt{264}\right]/3\right].$$

Алгебраические неравенства с параметрами. 2.39. а) $(-\infty; (1 - a)/(2(a - 2)))$ при $a < 2$; $(-\infty; +\infty)$ при $a = 2$; $((1 - a)/(2(a - 2)); +\infty)$ при $a > 2$; б) $((2a - 1)/2; a)$; в) $(a + 1; -a)$ при $a < -1/2$; $x \neq -1/2$ при $a = -1/2$; $(-a; a + 1)$ при $a > -1/2$; г) $((2a - 1)/(a - 1); -2a)$ при

$$a < -\sqrt{2/2}; \quad x \neq \sqrt{2} \quad \text{при} \quad a = -\sqrt{2/2}; \quad (-2a; (2a - 1)/(a - 1)) \quad \text{при} \\ -\sqrt{2/2} < a < \sqrt{2/2}; \quad x \neq -\sqrt{2} \quad \text{при} \quad a = \sqrt{2/2}; \quad ((2a - 1)/(a - 1); -2a)$$

$$\text{при} \quad \sqrt{2/2} < a < 1; \quad x > -2 \quad \text{при} \quad a = 1; \quad (-\infty; -2a) \cup ((2a - 1)/(a - 1); +\infty) \\ \text{при} \quad x > 1; \quad \text{д)} \quad (-\infty; (m - 2)/(m^2 + m)) \cup (-1/m; 1/m) \quad \text{при} \quad 0 < m < 1/2; \\ (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \quad \text{при} \quad m = 1/2; \quad (-\infty; -1/m) \cup ((m - 2)/(m^2 + m)) \quad \text{при} \\ m > 1/2. \quad 2.40. \quad \text{а)} \quad \emptyset \quad \text{при} \quad a < -2; \quad x = -1 \quad \text{при} \quad a = -2; \quad ((a - 1)/3; a + 1) \\ \text{при} \quad a > -2; \quad 6) \quad (2/(1 - 2a); -2/(2a + 1)) \quad \text{при} \quad a < -1/2; \quad (2/(1 - 2a); +\infty) \\ \text{при} \quad -1/2 \leq a < 1/2; \quad \emptyset \quad \text{при} \quad a \geq 1/2. \quad 2.41. \quad \text{а)} \quad a > 1; \quad 6) \quad a \leq -1; \quad \text{в)} \quad 0 \leq a \leq 1$$

$$2.42. \quad \text{а)} \quad (2a + 3; 2 - a) \quad \text{при} \quad a < -1/3; \quad a = -1/3; \quad (2 - a; 2a + 3) \quad \text{при} \\ a > -1/3; \quad 6) \quad [1; (1 - 3a)/a] \quad \text{при} \quad a < 0; \quad (-\infty; 1] \quad \text{при} \quad a = 0; \quad (-\infty; 1] \cup \\ \cup [(1 - 3a)/a; +\infty) \quad \text{при} \quad 0 < a < 1/4; \quad (-\infty; +\infty) \quad \text{при} \quad a = 1/4; \quad (-\infty; (1 -$$

$$- 3a)/a] \cup [1; +\infty) \quad \text{при} \quad a > 1/4; \quad \text{в)} \quad \left[-\infty; \left[4 - a - \sqrt{a^2 + 4}\right]/2\right] \cup \left[\left[4 - a + \sqrt{a^2 + 4}\right]/2; +\infty\right]; \quad \text{г)} \quad \left[\left[-1 + \sqrt{1 - a}\right]/a; \left[-1 - \sqrt{1 - a}\right]/a\right]$$

$$\text{при} \quad a < 0; \quad [-1/2; +\infty) \quad \text{при} \quad a = 0; \quad \left[-\infty; \left[-1 - \sqrt{1 - a}\right]/a\right] \cup \left[\left[-1 - \sqrt{1 - a}\right]/a; +\infty\right] \quad \text{при} \quad 0 < a < 1; \quad (-\infty; +\infty) \quad \text{при} \quad a \geq 1. \quad 2.43. \quad \text{а)}$$

$$a < -1/3 \quad \text{и} \quad a > 3; \quad 6) \quad 2 < a < 8; \quad \text{в)} \quad -2 \leq a \leq 6; \quad \text{г)} \quad a < -4 \quad \text{и} \quad a > 4/3. \quad 2.44. \\ \text{а)} \quad a < -1/2; \quad 6) \quad a < 0 \quad \text{и} \quad a > 1/5. \quad 2.45. \quad \text{а)} \quad a < -6 \quad \text{и} \quad a > 2. \quad \text{Поскольку} \\ \text{знаменатель дроби положителен, неравенство эквивалентно неравенству} \\ x^2 - (a + 2)x + 4 > 0, \quad \text{которое справедливо при всех } x \quad \text{тогда и только} \\ \text{тогда, когда} \quad D = (a + 2)^2 - 16 < 0; \quad 6) \quad -1/2 \leq a \leq 1; \quad \text{в)} \quad a < -3/2 \quad \text{и} \quad a > 1 +$$

$$+ \sqrt{2}. \quad \text{Знаменатель не равен нулю ни при каком } x. \quad \text{Поэтому} \quad 1 - a^2 + 2a < 0. \quad \text{Случай} \quad a > 0 \quad \text{и} \quad a < 0 \quad \text{следует рассматривать отдельно.} \quad 2.46. \\ 1/4 \leq a \leq 1/2. \quad \text{Корни квадратного трехчлена в левой части:} \quad x_1 = -2;$$

$x_2 = \frac{2a-1}{a}$. Условию удовлетворяют такие $a > 0$, что $-2 \leq \frac{2a-1}{a} \leq 0$.

2.47. $a \leq 1/2$. 2.48. а) \emptyset при $a < -3$; $x = 1$ при $a = -3$; $\left[2 - \sqrt{3+a}\right]/2 \leq x \leq \left[2 + \sqrt{3+a}\right]/2$ при $-3 < a \leq -2$; $-a/4 \leq x \leq \left[2 + \sqrt{3+a}\right]/2$ при $a > -2$. Заменой $y = \sqrt{4x+a}$ неравенство приводится к системе $y \geq 0$, $y^2 - 2y - 2 - a \leq 0$; б) \emptyset при $a < 0$; $(0; +\infty)$ при $a = 0$; $[-4a/3; -a] \cup (0; +\infty)$ при $a > 0$. При $a = 0$ получаем $x > 0$, при

$a > 0$ заменой $t = x/a$ приходим к неравенству $t + 2 > \sqrt{3t+4}$; в) \emptyset при $a < 0$; $(0; +\infty)$ при $a = 0$; $[-a/3; 0] \cup (8a; +\infty)$ при $a > 0$. 2.49.

а) -3 ; $\left[1 + \sqrt{13}\right]/2$. При $a = -3$ неравенство выполняется при всех x , при $a \neq -3$ приводится к виду $\left[x\sqrt{a+3} - a\right] \left[x^2 + \sqrt{(a+3)(a-2)} + a\right] \leq 0$; б) 0 ; $\sqrt{17}/2$. 2.50. а) $p \leq 0$; $p \geq 3$; б) $q \leq 0$, $q \geq 12$. 2.51. а)

$a = 2 \pm \sqrt{2}$. Пусть $x - 2 = t$, $|a - 2| = b$. Неравенство приводится к виду $f(t) = \frac{1}{2} b(|t+b| + |t-b|) - \frac{1}{b} |t| \geq 1$. Поскольку $f(-t) = -f(t)$, достаточно изучить поведение этой функции при $t \geq 0$; б)

$a = -3 \pm \sqrt{3}$. 2.52. $-7/2 \leq a \leq 1$. Оба неравенства системы должны выполняться при $y = 0$, $x = -2$ и $y = 0$, $x = -1$. 2.53. $b = 1/2$. 2.54.

$(3\sqrt{2}; 3\sqrt{2} - 3)$; $(-3\sqrt{2}; -3\sqrt{2} - 3)$. Сложив неравенства системы, получим: $(x - y - 3)^2 \leq 0$. 2.55. а) $b = -1/4$. Если $(x_0; y_0)$ — решение данной системы, то $(y_0; x_0)$ — также ее решение. Подставляя $x = y$ в любое из неравенств, получаем, что неравенство $x \geq (x - b)^2$ должно иметь единственное решение. Отсюда $b = -1/4$. Подставляя $b = -1/4$ в исходную систему, получаем систему

$$\begin{cases} x \geq (y + 1/4)^2, \\ y \geq (x + 1/4)^2. \end{cases}$$

Сложив неравенства этой системы, получаем после преобразований $(x - 1/4)^2 + (y - 1/4)^2 \leq 0$, т. е. $x = 1/4$; $y = 1/4$; б) $a = 1/8$. 2.56. $-13/3 < a \leq -19/5$. Чтобы найти целочисленные решения уравнения, перепишите его в виде $(5x - 2y)(3x - y) = -7$ и воспользуйтесь

тем, что число 7 — простое. 2.57. а) $7\sqrt{3}$. Пусть $t = x + 5y$. Тогда после замены $x = t - 5y$ приходим к квадратичному неравенству относительно y с параметром t . Условием его разрешимости является неотрицательность дискриминанта, являющегося квадратичной функцией от t ; б) $2\sqrt{2}$. 2.58. а) $\max(x^2 + y^2) = 8$ достигается при

$x = y = \pm 2$; $\min(x^2 + y^2) = 8/3$ достигается при $x = -y = \pm 2/\sqrt{3}$. Обозначив $x^2 + y^2 = t$, приходим к системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = t, \\ 2xy = 2t - 8, \end{cases}$$

равносильной системе

$$\begin{cases} (x - y)^2 = 8 - t, \\ (x + y)^2 = 3t - 8; \end{cases}$$

б) $\max(x^2 - xy + y^2) = 4 + \sqrt{13}$, $\min(x^2 - xy + y^2) = 4 - \sqrt{13}$. Положив $x^2 - xy + y^2 = t$, приходим к системе

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = t, \\ 2x^2 + y^2 + 2xy = 2. \end{cases}$$

Умножив первое из уравнений на 2, второе — на t и вычтя из второго уравнения первое, получим уравнение $(2t - 2)z^2 + 2(t + 1)z + t - 2 = 0$, где $z = x/y$. Осталось записать условия разрешимости этого уравнения: $4 - \sqrt{13} \leq t \leq 4 + \sqrt{13}$ и убедиться, что для любого t из этого промежутка система имеет решение (случай $y = 0$ следует рассмотреть отдельно). 259. а) $-\sqrt{7/5}$. Рассмотрите данное уравнение как квадратное относительно z . Запишите условие его разрешимости, а затем — условие разрешимости относительно y полученного квадратичного неравенства; б) $\sqrt{5}$. 260. а) $4\sqrt{6}/3$. Пусть $t = 2x + y - z$. После подстановки $z = 2x + y - t$ задача становится аналогичной задаче 259, а); б) $-\sqrt{33/2}$. 261. $-17/48$. 262. а) $a < -1$. Первое неравенство можно переписать так:

$$-x^2 - 2xy + 7y^2 \leq 1 - \frac{2}{a+1}. \quad (*)$$

Умножая неравенство (*) на 2 и складывая со вторым неравенством системы, получаем $(x + 3y)^2 \leq -2/(a + 1)$, откуда $a < -1$. Существование решений при всех $a < -1$ следует из разрешимости системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = -1, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 = -2; \end{cases}$$

б) $a > -2$.

Глава 3. Задачи на составление уравнений и неравенств

3.1. 12 км/ч. 3.2. 160/3 км/ч; нет. 3.3. 15/4. 3.4. а) 30 км/ч $< v < 33,6$ км/ч; б) $v > 60$ км/ч. 3.5. 18 км/ч. 3.6. 2,8 км. 3.7. 5/6 км/ч. 3.8. 25 км/ч. 3.9. 32 км/ч. 3.10. 182 км. 3.11. а) 60 км/ч, 80 км/ч; б) 3/4 ч, 1/2 ч. 3.12. 20 км/ч. 3.13. 4 ч. 3.14. 14 км/ч. 3.15. 8 мин 20 с. 3.16. 6 ч. 3.17. 360 км/ч. 3.18. 6 км/ч, 9 км/ч, 12 км/ч, 42 км. 3.19. 20 км/ч, 40 км/ч. 3.20. 3 ч 40 мин, 2 ч 12 мин. 3.21. 21 км/ч. 3.22.

48 мин. **3.23.** а) 3 м, б) 60 м **3.24.** а) 4 ч 45 мин; б) 390 км. **3.25.** 3 ч 45 мин. **3.26.** 60 км/ч, 40 км/ч **3.27.** Нет Рассмотрите 2 случая: когда точка O встречи находится на грунтовой дороге и когда на шоссе **3.28.** 0,9 мин Пусть первый мотоциклист проходил x кругов в минуту, а второй y кругов. По условию $\frac{14}{x} + \frac{16}{4x} = \frac{12}{y} + \frac{18}{y} + \frac{1}{2x}$, откуда $x = \frac{5}{6}y < y$, так что первым финишировал второй мотоциклист, причем $5 < y < \frac{30}{4}$. Используя наблюдение посетителя, получаем, что $4(y - x) = \frac{2y}{3}$ — целое число, откуда следует, что $y = 6 \left[y < \frac{30}{4} \right]$.

3.29. 240 км. **3.30.** а) 4 км/ч, б) 2 ч. **3.31.** 10 ч, 15 ч **3.32.** 2 **3.33.** 6 мин, 9 мин **3.34.** 10 **3.35.** 168 м^3 **3.36.** 18 ч, 24 ч **3.37.** 3. **3.38.** а) 9, б) 4. **3.39.** 120 м^3 , 100 м^3 . **3.40.** 20 ч, 25 ч. **3.41.** 3 ч. **3.42.** 18 мин. **3.43.** 8; (0; 8], б) 3,4 м/ч, (2, 4]. **3.44.** 160 ч; 20% **3.45.** 150 г, 450 г **3.46.** 170 кг. **3.47.** $4 \cdot 3$ **3.48.** 1,92 кг, 0,96 кг, 9,12 кг. **3.49.** 2,5 кг. **3.50.** $15(30 - q)$; $10 < q < 58/3$. **3.51.** 20 г. **3.52.** 15 кг. **3.53.** В третьем, если $35 \frac{5}{6} < c \leq 37$; равны, если $c = 35 \frac{5}{6}$, в четвертом, если $35 \leq c < 35 \frac{5}{6}$. **3.54.** 2,1 кг. **3.55.** 60 л. **3.56.** 726. **3.57.** 120 **3.58.** В первой. **3.59.** 7 кг, 4 кг, 4 кг. **3.60.** 12. **3.61.** 3. **3.62.** 24. **3.63.** 180 т. **3.64.** 80, 16, 16. **3.65.** 159. **3.66.** 600 р. **3.67.** $1/3$. **3.68.** -8. **3.69.** $\pm \sqrt[4]{8}$. **3.70.** На 16. **3.71.** 120. **3.72.** 50. **3.73.** $2/27$. **3.74.** 27. **3.75.** $1/2$. **3.76.** (7, 7, 7); $(7(-1 - \sqrt{2}), 7, 7(1 + \sqrt{2}))$; $(7(1 + \sqrt{2}), 7, 7(1 - \sqrt{2}))$ **3.77.** 3. **3.78.** $5/2$. **3.79.** 16. **3.80.** а) 17; б) -16 **3.81.** 1; -2. **3.82.** 1; $3 \pm 2\sqrt{2}$. **3.83.** 77. **3.84.** 1791. **3.85.** 153; 226; 379. **3.86.** 137. **3.87.** 35; 45. **3.88.** 832. **3.89.** а) $k = 27$, $l = 189$, $m = 1323$; б) $a = 8$; $b = 56$; $c = 392$ **3.90.** 964. **3.91.** 14. **3.92.** а) 94, б) 84.

Глава 4. Показательные и логарифмические уравнения

Свойства показательной и логарифмической функций. **4.1.** а) $a > b$; б) $a < b$; в) $a > b$; г) $a < b$; д) $a > b$; е) $a > b$; ж) $a > b$ при $a > 1$,

$a < b$ при $a < 1$. **4.2.** а) $5\sqrt{5}$; б) 4; в) 6; г) $-5/4$; д) 4; е) 1; ж) 2; з) -5. **4.3.** а) Из равенства $\log_c b \cdot \log_c a = \log_c a \cdot \log_c b$ сразу следует,

$\log_c a = \log_c b$, что $b = a$. **4.4.** а) $1 - a$; б) $(4 - a)/(3 - 2a)$. Воспользуемся тем, что $\log_{24} 48 = \log_6 48 / \log_6 24 = (3 \log_6 2 + 1)/(2 \log_6 2 + 1)$; в) $3(1 + a)$. **4.5.** а) $(a - 2b - 2)/(1 - a)$; б) $(a + 1)/(2a + b)$. **4.6.** а) $(1 + a + ab)/(2 + a + ab)$; б) $(a + 2ab)/(2 + a + 2ab)$. **4.7.** а) $(10\sqrt{11} + 4)/(6 - 3\sqrt{11})$; б) $(2\sqrt{5} - 1)/(\sqrt{5} + 1)$. **4.8.** а)

$3^{200} = 9^{100} > 8^{100} = 2^{300}$; б) $\log_2 3 > 3/2$, так как $3 > 2^{3/2} = 2\sqrt{2}$; в) $1,6 > \log_2 3$, поскольку $2^8 > 3^5$; г) $\lg 2 > 0,3$, поскольку $2^{10} = 1024 > 10^3$. **4.9.** а) второе; б) второе; в) первое; г) второе; д)

первое, так как $\log_2 3 > 3/2 > \log_3 4$; е) первое, так как $\log_2 5 - 2 = \log_2 5/4 > \log_2 11/9 > \log_3 11/9 > \log_3 11 - 2$; ж) первое, поскольку сравнить числа $\log_2 5 - 2 = \log_2 5/4$ и $\log_3 12 - 2 = \log_3 4/3$ — все равно что сравнить $3^{\log_2 5/4} = (5/4)^{\log_2 3}$ и $4/3$, но $(5/4)^{\log_2 3} > (5/4)^{3/2} = (125/64)^{1/2} > (16/9)^{1/2}$, ибо $125/64 > 16/9$;

з) второе, поскольку $\log_2 5 < 7/3$, а $3^{\log_2 5} < 3^{\sqrt[3]{37}}$, но $3^7 < 13^3$ ($2187 < 2197$). 4.10. а) $2 \log_{20} 75 < 3 < 2 \log_8 25$; б) первое число больше, так как $\log_{189} 1323 - \log_{63} 147 = 3/(a+3)(a+2)$, где $a = \log_3 7$. 4.11. Пусть $m > n > 1$. Тогда $\log_n(n+1) = 1 + \log_2(1 + 1/n)/\log_2 n > 1 + \log_2(1 + 1/m)/\log_2 m = \log_m(m+1)$.

Показательные уравнения. 4.12. а) -1 ; 3; б) $6/5$; в) 2. 4.13. а) 0; б) $-1/2$; в) -2 ; $4/3$; 3; г) -5 ; $-4/5$; 2. 4.14. $\pi/5$; $k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$. 4.15. а) 3; б) $4 + \log_2 7$. Замена $y = 2^{x-4}$; в) 1; г) -1 . 4.16. 1. 4.17. $\log_2 6/5$. 4.18. $\log_{5/2} 3$; $-\log_{5/2} 2$. 4.19. $-1/3$; 1. 4.20. ± 3 . Заметьте, что

$$(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2}) = 1. \quad 4.21. \text{ а) } (\log_2 5 - 2)^2; \text{ б) } (2 \log_2 3 - 1)^2.$$

4.22. а) $-\log_{5/2} 2$; $\log_{5/2} 3$. Поделите уравнение на 2^{2x} и выполните

замену $y = (5/2)^x$; б) $-\log_{3/2} 2$; $\log_{3/2} 5$; в) $-\log_{7/2} 2$; $\log_{7/2} 3/2$; г) $-\log_{5/3} 2$; $2 \log_{5/3} 2$; д) 1; 2. 4.23. 2; $1 + \log_2 3$. 4.24. а) 2; $-1 - \log_3 2$. Приравнивая логарифмы по основанию 3 левой и правой частей, приходим к квадратному уравнению. Для удобства введем обозначение $a = \log_3 2$; б) 1; $(7a + 2)/3$, где $a = \log_2 3$. 4.25.

$\log_3(6 + \sqrt{33})/3$. После замены $y = 3^x$ уравнение приводится к виду $3y^2 - 9y = |3y - 1|$. 4.26. а) -2 ; $6/7$; б) $(2 - k)/(2 + k)$; $(2 + k)/(2 - k)$, где $k = \log_2 3$. 4.27. -3 ; $x \geq 0$. 4.28. а) -1 ; 0; 5; б)

0; 2; $1 \pm \sqrt{13}$. 4.29. а) 2. Корень легко угадывается. Для доказательства того, что других корней нет, напомним уравнение: $(3/5)^x + (4/5)^x = 1$. Левая часть его монотонно убывает; б) 1. Левая часть

убывает, правая — возрастает; в) 2. Функция $\left[\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \right]^x + \left[\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \right]^x$ убывает.

Логарифмические уравнения. 4.30. а) 9; б) $\sqrt{3} - 2$; в) 3; г) $-4 + 2\sqrt{3}$.

4.31. а) 1; б) 14; в) 3; г) $(-2 + \sqrt{73})/2$; д) 1. 4.32. а) $1/125$; 5; б) $3\sqrt{2}$;

8. 4.33. а) $1 - \sqrt{2}$; б) 0. 4.34. $-13/9$. 4.35. $28/3$. Замена $y = \log_3(x -$

— 1/3). 4.36. 3 4.37. $5\sqrt[5]{25}$, 5 4.38. —1 4.39. 1/9; 3 4.40. а) $11^{\pm\sqrt{\log_7(3+\sqrt{5})}}$, б) $3^{\pm\sqrt{\log_5(3+2\sqrt{2})}}$ 4.41. а) 1; 3; 6) 1; 5. 4.42. 2.

4.43. 3. 4.44. а) 1, 6, 6) 1, $2^{\pm\sqrt{a^3+a}}$, где $a = \log_2 3$ 4.45. 1/9; $\sqrt[3]{3}$. 4.46. 1000 4.47. —1 4.48. 1. Пусть $t = (1-2x)/(3x-2)$. Тогда

$(1-x)/(3x-2) = -t-1$ После этого выполните замену $y = 6^t$. 4.49. 1/1000; 1/100, 100, 1000 Прологарифмируйте уравнение по основа-

нию 10 и выполните замену $y = \lg x$. 4.50. $\sqrt[3]{3/8}$. Приведите все

логарифмы к основанию 3. 4.51. а) $3\sqrt[3]{3}$ Прологарифмируйте по основанию 3; б) 1/3. 4.52. 2. 4.53. а) 3/2; 12. Уравнение приводится к виду $y - (a+2) = (a-1)(2a+1)/y$, где $y = \log_3 x$, $a = \log_3 2$; б) 2/27; 6; в) 5/3; 15 4.54. 1, 3.

Системы логарифмических и показательных уравнений. 4.55. (—2; 0).

4.56. (4; $3\sqrt[3]{3}$); $2^{-7/3}$; $3^{-43/36}$). 4.57. а) (16; 4); (10; 32/5); б) (1; 27); (9;

3). 4.58. (1/9, 1/81). 4.59. (0; $2^{8/9}$) 4.60. (2; 6); (1/2; 10). 4.61. ($\pm\sqrt[3]{3}$; 4). 4.62. (—1; 4), ($\log_3 2 - 1$; 2) 4.63. (9; 3); (1/27; 729). 4.64. а)

($\sqrt{2/2}$; $(3+2\sqrt{2})/2$); ($-\sqrt{2/2}$; $(3-2\sqrt{2})/2$). Из второго уравнения следует, что $y > 0$, $2+2x-y > 0$, $1+2x-y = -x^2$. Полагая в

первом уравнении $z = 3^{x^2}$, приходим к уравнению $z + 9/z = 4\sqrt[3]{3}$; б)

(($3+2\sqrt{2}$)/2; $-\sqrt{2/2}$), (($3-2\sqrt{2}$)/2; $\sqrt{2/2}$). 4.65. а) ($\sqrt{5/2}$; $\sqrt{2/5}$); б)

($\sqrt[3]{33/6}$; $4\sqrt[3]{33/33}$). 4.66. а) ($t^{t/(t-1)}$, $t^{1/(t-1)}$), где $t = \log_3 2$. Из второго уравнения следует, что $x = ty$ Подставляя в первое уравнение, получаем $(ty)^y = y^{ty}$, т. е. $y^{t-1} = t$; б) (1; 1); (2/4; 27/8); в) (1; 1);

($1/\sqrt[3]{9}$; $1/\sqrt[3]{9}$); г) (1; 1); (5/3, (5/3)^{3/2}).

Задачи с параметрами. 4.67. а) $\log_2 |a|$ при $a < 0$; \emptyset при $a = 0$; $\log_2 a$, $2 \log_2 a$ при $a > 0$, б) $3 \log_5 |a|$, $2 \log_5 |a|$ при $a < 0$; \emptyset при

$a = 0$; $2 \log_5 a$ при $a > 0$ 4.68. а) \emptyset при $0 < |a| < 1$, $a = \sqrt{2}$; ± 1 при остальных a , б) a^{-2} , $a^{-1/2}$ при $a > 0$, $a \neq 1$; \emptyset при остальных a .

4.69. а) $\log_2 ((a^2-1)/(2a-6))$ при $a \in (-1, 3-2\sqrt{2}] \cup (3;$

$3+2\sqrt{2}]$, \emptyset при остальных a , б) $\log_3 (1+\sqrt{1-a})$ при $a < 0$;

$\log_3 (1 \pm \sqrt{1-a})$ при $0 \leq a \leq 1$; \emptyset при $a > 1$. 4.70. а) $3 \pm \sqrt{35-3^c}$

при $c < 3$, $3 \pm \sqrt{35-3^c}$, $3 \pm \sqrt{3^c-27}$ при $3 \leq c \leq \log_3 31$, \emptyset при

$c > \log_3 31$; 6) $\{3, 5\}$ при $b = 3$; $(b + 3)/2$ при $3 < b < 7$; \emptyset при остальных значениях b . 4.71. а) \emptyset при $a < 10^{1-\sqrt{3}}$, $10^{1-\sqrt{3}}$ при $a = 10^{1-\sqrt{3}}$; $10^{1-\sqrt{3}}$, $10^{-1} + \sqrt{3 + 4 \lg a}$ при $10^{1-\sqrt{3}} < a < 10^{1+\sqrt{3}}$; $10^{1+\sqrt{3}}$ при $a \geq 10^{1+\sqrt{3}}$; б) $a^{-1} + \sqrt{1-a}$, $a^{-1} - \sqrt{1+3a}$ при $0 < a \leq 1$; \emptyset при остальных a . 4.72. а) $x = 1$ Подставьте $a = 1$; б) $x = 2$ 4.73. $4 < a < 8$. Уравнение, получающееся в результате осво-бождения от знака логарифма, должно иметь единственное решение на промежутке $1 < x < 3$, причем $4 < a < 10$, $a \neq 7 \pm 2\sqrt{2}$. 4.74. $1/2$; 1 ; $3/2$. Уравнение можно переписать в виде

$$2^u \log_3 (u + 3) = 2^v \log_3 (v + 3),$$

где $u = x^2 - 2x$, $v = 2|x - a| - 1$. Поскольку функция $\varphi(u) = 2^u \log_3 (u + 3)$ возрастает, это значит, что исходное уравнение равносильно уравнению $u = v$. 4.75. $-9/4 \leq a < 4$. 4.76. $b = 1$, $b = 1/2$. Подставьте $a = 1$. 4.77. а) $a = 4/3$. Если $(x_0; y_0)$ — решение данной системы, то $(-x_0; y_0)$ — тоже решение. Из единственности решения следует, что $x_0 = 0$. Это дает возможность найти "подозри-тельные" значения a , после чего необходимо сделать проверку; б) $2/5$.

Глава 5. Показательные и логарифмические неравенства

5.1. а) $(-\infty; -1)$; б) $(-1/2; +\infty)$; в) $(-\infty; -7) \cup (1; +\infty)$; г) $(-\infty; 0) \cup (1; 2)$; д) $(0; 1)$; е) $(-\infty; 0) \cup [1/2; +\infty)$; ж) $(1/2; +\infty)$; з) $(1/6; +\infty)$; и) $[-2; 0]$; к) $(-\infty; 0) \cup (\log_2 3 - 1; +\infty)$. 5.2. а) $(-1/2; 2]$; б) $(-\infty;$

$-\log_2 3) \cup (0; 2)$; в) $(0; \log_3 ((3\sqrt{17} - 9)/3)) \cup (1; +\infty)$; г) $(-\infty; -\log_3 2) \cup [1 - \log_3 5; \log_3 5 - 1)$; д) $(\log_{3/5} \frac{4}{5}; 0)$. 5.3. а) $(-\infty;$

$\log_{3/2} \frac{4 - \sqrt{5}}{11} \cup [\log_{3/2} \frac{4 + \sqrt{5}}{11}; -1]$; б) $[\log_2 3; 2)$. 5.4. а) $(-\infty;$

$-3] \cup [0; 3]$; б) $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$. 5.5. а) $\{-4; -4/3\}$; б) $((11a - 1)/(5a + 2), (1 - a)/(5a - 2))$, где $a = \log_5 2$; в) $((a + 3)/(3a + 2); (1 - a)/(2 - 3a))$, где $a = \log_3 2$. 5.6. а) $(-\infty; -1 - \log_5 2) \cup (-1;$

$2]$; б) $(1/2; 1] \cup [1 + 3 \log_2 3)/2; +\infty)$. 5.7. а) $(-1/2; 0)$; б) $(2; 3)$; в) $1 < |x| < \sqrt{2}$, г) $(-2; 1)$; д) $(2; 5]$. 5.8. а) $(2, 3]$; б) $[-3; -2) \cup (3; 4]$; в) $[-2; -1) \cup (2; 6]$; г) $[-2, -1) \cup (1; 2) \cup (2; 6]$; д) $[-2; -1) \cup (1;$

$2) \cup (2; 6]$. 5.9. а) $(3 \log_3 2; 2]$; б) $(0, \log_2 3)$. 5.10. $(0; 1/2) \cup (16; +\infty)$ 5.11. а) $(1/2, 3]$, б) \emptyset , в) $(-3, -2)$ 5.12. а) $(0, 1/100) \cup (1/10; 1000)$; б)

$(1/4, 1/2) \cup [2, +\infty)$, в) $(0, 1/2) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (2; +\infty)$, г) $(0; 1/\sqrt{5}) \cup (1;$

- $5^{4/7}$]. 5.13. а) $(-2; 0)$, б) $(-3; -1)$, в) $(1; 3)$. 5.14. $(1; 2]$. 5.15. $(-\sqrt{17}; -4) \cup (-2; 3) \cup (4; \sqrt{17})$. 5.16. $(3^{-3/4}, 3^{-1/4}) \cup (3^{3/11}, 3)$. 5.17. $(0; 1)$. 5.18. $(-2, 4)$. 5.19. $[3, 4)$. 5.20. $(-1/2; 1/2)$. 5.21. $[1, 10^8] \cup [10^{18}, 10^{25}]$. 5.22. $\{1/2\} \cup (1, +\infty)$. 5.23. $[1 - \sqrt{3}; (3 - \sqrt{5})/2) \cup (2; 5/2)$. 5.24. а) $(0; 1/\sqrt{10}] \cup (10, +\infty)$, б) $(0; 1/10] \cup [10; +\infty)$. 5.25. а) $(0; 1/7) \cup (1/2; 1)$; б) $[1/5; 1/3)$. 5.26. $[-3; -1) \cup (0; 2]$. 5.27. $(-6/5; 0)$. 5.28. $(-1; \sqrt[6]{2} - 1) \cup [63; +\infty)$. 5.29. $(-3; (3 - \sqrt{17})/4) \cup (0; 1) \cup ((3 + \sqrt{17})/4; +\infty)$. 5.30. а) $(-1/5; 0) \cup (0; 1/12)$, б) $(-1/4; 0) \cup (0; 1/6)$; в) $(0; 3) \cup (25/8, \sqrt{10})$; г) $(-1; 0) \cup (0; 1/2) \cup (1; 5]$, д) $(-\infty; -1) \cup (3/2; 2]$. 5.31. а) $(2; 5/2) \cup (5/2; 3)$; б) $(-4; -3) \cup \left\{-\frac{5}{2}\right\} \cup (-2; 1)$, в) $(1 - 2\sqrt{2}; -1) \cup [2; 3]$. 5.32. $(-\infty; 0) \cup (0; 12/7) \cup [19/49; +\infty)$. 5.33. $(-\infty; -3] \cup [-1; 2 - \sqrt{7}] \cup [2 + \sqrt{7}; +\infty)$. 5.34. $(-311; -11)$. 5.35. а) $(\sqrt{5}; 3)$; б) $[2; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$. 5.36. а) $(-2; 2)$; б) $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$. 5.37. а) $(0; 5^{-2\sqrt{5}}] \cup [5^{2\sqrt{5}}; +\infty)$; б) $(0; 7^{-2\sqrt{7}}] \cup [7^{2\sqrt{7}}; +\infty)$, в) $(0; 1) \cup [1; 9]$. 5.38. $(0, 1/2) \cup (1; 4) \cup (32; +\infty)$.

Задачи с параметрами. 5.39. а) $(\log_a 6; 0)$ при $0 < a < 1$; $(0; \log_a 6)$ при $a > 1$; \emptyset при остальных a ; б) $(\log_2 \frac{2a-1}{a-1}; 1)$ при $a < \frac{1}{2}$; $(-\infty; 1)$ при $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$; $(-\infty; 1) \cup (\log_2 \frac{2a-1}{a-1}, 1)$ при $a > 1$; в) $[a; 1/a) \cup [1/a^2, 1/a^3)$ при $0 < a < 1$; $(1/a^3, 1/a^2] \cup (1/a, a]$ при $a > 1$; \emptyset при остальных a ; г) $(0; 2)$ при $a > 1$; $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ при $0 < a < 1$; \emptyset при $a = 1$; д) $(-\infty; -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, +\infty)$ при $0 < a < 1$; $(-1 - \sqrt{2}; -2) \cup (0; -1 + \sqrt{2})$ при $a > 1$; \emptyset при остальных a ; е) $(a - 1; +\infty)$ при $0 < a < 1$; $(-1; a - 1)$ при $a > 1$; \emptyset при остальных a ; ж) $(1 - \sqrt{1+a}; 0) \cup (2; 1 + \sqrt{1+a})$ при $0 < a < 1$; $(-\infty; 1 - \sqrt{1+a}) \cup (1 + \sqrt{1+a}; +\infty)$ при $a > 1$; \emptyset при остальных a ; з) $(2; 1 + \sqrt{1+a})$ при $0 < a < 1$; $(1 + \sqrt{1+a}; +\infty)$ при $a > 1$; \emptyset при остальных a ; и) $(-a; +\infty)$ при $a \leq -1$; $(1; +\infty)$ при $-1 < a \leq -1/4$; $(x_1; x_2) \cup (1; +\infty)$ при $-1/4 < a < 0$; $(x_1; a) \cup (0; 1) \cup (x_2; +\infty)$ при $0 \leq a \leq 1$; $(-a; -1) \cup (x_1, 0) \cup (0; 1) \cup (x_2; +\infty)$ при $1 < a \leq 2$; $(-a; x_1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (x_2; +\infty)$ при $a > 2$. Здесь $x_1 = (1 - \sqrt{1+4a})/2$; $x_2 = (1 + \sqrt{1+4a})/2$. Изобразите множество решений неравенства на

плоскости xOa ; к) $(0; a^a] \cup [a^{-a}; +\infty)$ при $0 < a < 1$; $[a^{-a}; a^a]$ при $a > 1$, \emptyset при остальных a ; л) $(0; 4]$ при $0 < a < 1$; $(0; +\infty)$ при $a = 1$; $[4; +\infty)$ при $a > 1$; \emptyset при $a \leq 0$. **5.40.** $(3; +\infty)$ при $a \leq 2$; $(2; a) \cup (3, +\infty)$ при $2 < a \leq 3$; $(2; 3) \cup (a; +\infty)$ при $a > 3$. **5.41.** $\left[1; 1 + \log_3 \frac{c+1}{c+2}\right]$ при $c < -2$; $[1; +\infty)$ при $c \geq -2$. **5.42.** $(2; 5]$. **5.43.** а) $\alpha \geq 2$; б) $0 < c \leq 8$. **5.44.** $-13 \leq a \leq 12 - 4\sqrt{6}$. Выполните замену $y = 2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x}$, учтите при этом, что $y \geq 2\sqrt{6}$ при $x \geq 0$. **5.45.** $a = 2$. При $0 < a < 1$ неравенство имеет бесконечно много решений. При $a > 0$ после замены $u = x^2 + ax + 5$ неравенство приводится к виду $\log_3(u+1) \log_5(u^2+1) \leq 1$. Поскольку левая часть – монотонная функция, получим $u \leq 2$. **5.46.** $p < -0,99$; $-0,02 < p < 0$; $0 < p < 0,01$. Изобразите множество решений неравенства на плоскости xOp .

Глава 6. Планиметрия

6.1. 202,8. **6.2.** $\frac{1}{2} a^3 b / (a^2 + b^2)$. **6.3.** Если $a < \sqrt{3}/2$, задача не имеет решения; при $a = \sqrt{3}/2$ задача имеет одно решение: $AC = 1/2$; при $\sqrt{3}/2 < a < 1$ задача имеет два решения: $AC = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4a^2 - 3})$; при $a \geq 1$ – одно решение: $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{4a^2 - 3})$. **6.4.** $3\sqrt{30}$. **6.5.** $BK < AM$. **6.6.** К вершине A . **6.7.** $\sqrt{6}$. **6.8.** $93/25$. **6.9.** $3\sqrt{2}$. **6.11.** 90° . **6.12.** а) 15° , 100° , 65° ; б) 30° , 80° , 70° . **6.13.** $\sqrt{5}/2$. **6.14.** $\pi/6 - \sqrt{3}/4$ и $5\pi/6 + \sqrt{3}/4$. **6.15.** 90° , 60° , 30° . **6.16.** 3:1. **6.17.** 30° , 60° , 90° ($\angle B = 90^\circ$). **6.18.** $\frac{1}{8}(\pi - 2)a^2$. **6.19.** Площадь треугольника, затем площадь квадрата, шестиугольника и круга. **6.20.** $9a^2\sqrt{3}/16$. **6.21.** 2 и 1,5. **6.22.** В 8 раз. **6.23.** $(-1 + \sqrt{17})/2$. **6.24.** 58° . **6.25.** $\arccos((3 + \sqrt{3})/6)$. **6.26.** 75. **6.27.** 1.1. **6.28.** $a/\sin \alpha$. **6.29.** $\sqrt{13}$. **6.30.** Таких точек четыре: M_1 – точка пересечения медиан, а также точки M_2 , M_3 и M_4 такие, что $ABCM_2$, $BCAM_3$ и $CABM_4$ – параллелограммы. **6.31.** $(1 - \sin \alpha/2)/(1 + \sin \alpha/2)$. **6.32.** $(a + b)/2$. **6.33.** $\frac{1}{2} a \sqrt{3\sqrt{3}/\pi}$. **6.34.** $m^2\sqrt{3}/2$. **6.35.** 30° . **6.36.** $ab/2$. Докажите, что диагонали данного четырехугольника перпендикулярны. **6.37.** $l\sqrt{a(2l - a)}$. **6.38.** $\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$. **6.39.** Если $a < b$, то биссектриса угла A пересекает основание BC ; если же $a > b$, то – боковую сторону CD . **6.40.** $(6 - \pi): 2\pi$; $(6 - \pi)$. **6.41.** 9. Докажите, что площади треугольников, прилежащих к боковым сторонам, равны. Теперь, если y и $4y$ – площади двух оставшихся треугольников, то $y \cdot 4y = 2 \cdot 2$ (докажите). **6.42.** $a^2(\sqrt{3} - 1)/4$. **6.43.** $2\frac{1}{2}$, 6, $6\frac{1}{2}$. **6.44.**

$2 \arccos \frac{l(b+c)}{2bc}$. Пусть K – основание биссектрисы, $\angle A = \alpha$. Имеем

$$S_{ABC} = S_{ABK} + S_{ACK} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2} bc \sin 2\alpha = \frac{1}{2} cl \sin \alpha + \frac{1}{2} bl \sin \alpha. \quad 6.45.$$

$\pi/2$, $\pi/8$, $3\pi/8$. Пусть указанные в условии высота, биссектриса и медиана выходят из вершины A треугольника ABC . Обозначим через M середину BC , а через K точку, в которой биссектриса при продолжении пересекает описанную около ABC окружность. K – середина дуги BC . Прямая MK перпендикулярна BC и проходит через центр окружности. Из условия следует, что $\angle MKA = \angle MAK$, т. е. $AM = MK$.

Значит, M – центр окружности, описанной около ABC . **6.46.** $2R\sqrt{2}$,

$2R\sqrt{2}$, $2R\sqrt{2}$, $4R + 2R\sqrt{2}$. Пусть $ABCD$ – данная трапеция с основаниями AD и BC , $AD > BC$, O_1 – на AC , O_2 – на BD . Из условия следует, что AC – биссектриса угла BAD , тогда $AB = BC$. Точно так же $BC = CD$. Положим $AB = BC = CD = a$, $AD = b$. Имеем $O_1O_2 = 2R = \frac{1}{2}(b - a)$. Проекция боковой стороны на основание также равна $\frac{1}{2}(b -$

$- a) = 2R$. А поскольку и высота трапеции $2R$, то $a = 2R\sqrt{2}$ и т. д.

6.47. 39. Искомая медиана в три раза больше медианы в треугольнике со сторонами $\frac{2}{3} \cdot 36$, $\frac{2}{3} \cdot 15$, 26, проведенной к стороне длиной 26. Этот

треугольник прямоугольный с гипотенузой длиной 26. **6.48.** 48,6. Пусть углы, прилежащие к данной стороне, равны 2α и 2β . Тогда $3(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = 9$, $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = 3$. Если h – высота треугольника к данной стороне, то $h(\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\beta) = 9$, т. е. $h = 9/(\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\beta)$. Надо найти α и β , при которых $\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\beta$ принимает наибольшее значение. Положим $\operatorname{ctg} \alpha = x$, $\operatorname{ctg} \beta = y$, $x > 0$, $y > 0$, $x + y = 3$, откуда

$$xy \leq \frac{9}{4}, \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{2}(x^2 - 1)/x, \operatorname{ctg} 2\beta = \frac{1}{2}(y^2 - 1)/y, \operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\beta = \frac{3}{2} \left[1 - \frac{1}{xy} \right] \leq \frac{3}{2} \left[1 - \frac{4}{9} \right] = \frac{5}{6}. \quad 6.49. \pi^2(P - Q/\pi)^2/(4Q). \quad 6.50. (4/5, 8/5)$$

и $(-4/3, 8/3)$. Из условия следует подобие треугольников MAO и MBC , т. е. $MC/MO = MB/MA = BC/AO = 2$. Откуда для $M(x, y)$ получим $(x - 4)^2 + y^2 = 4(x^2 + y^2)$, $(x - 2)^2 + y^2 = 4(x^2 + (y - 1)^2)$ или $3x^2 + 3y^2 + 8x = 16$, $3x^2 + 3y^2 + 4x - 8y = 0$. Вычитая

уравнения, получим $x + 2y = 4$ и т. д. **6.51.** б) 60° , в) $4\sqrt{3}$. Положим $g(\alpha) = a$ или $8 - 4 \cos \alpha = a \sin \alpha$. Обозначим $\operatorname{tg} \alpha/2 = t$, тогда $\sin \alpha = 2t/(1 + t^2)$, $\cos \alpha = (1 - t^2)/(1 + t^2)$. Имеем уравнение $12t^2 - 2at + 4 = 0$. Из условия $D \geq 0$ находим $a^2 \geq 48$, откуда, поскольку $a > 0$,

$a \geq 4\sqrt{3}$. **6.52.** б) $\sqrt{3}/2 \leq S(\alpha) \leq \sqrt{3}$. **6.53.** 1. Если боковая сторона, перпендикулярная основаниям, равна x , то другая равна $2x$. Пусть меньшее основание равно y , тогда большее равно $y + x\sqrt{3}$. Площадь

трапеции равна $S = (y + x\sqrt{3}/2)x$. По условию $3x + x\sqrt{3} + 2y = 6$, откуда $y + x\sqrt{3}/2 = \frac{3}{2}(2 - x)$. Задача сводится к определению x , при

котором функция $S = \frac{3}{2}(2 - x)x$ достигает наибольшего значения.

6.54. 3,9. 6.55. 9,8. 6.56. 20. 6.57. $2 \arctg(2 \pm \sqrt{3})$. 6.58. $|2/5 - \cos^2 \alpha|$. 6.59. $\arcsin 5/13$, $\arccos 5/13$. 6.60. 2. Из условия следует, что отрезки OA и OB пересекают сторону CD . Обозначим через K проекцию O на BC . Если $OK = x$, то $BC = 2x$, $CK = \sqrt{13-x^2}$, $BK = \sqrt{25-x^2}$. Получаем уравнение $\sqrt{25-x^2} - \sqrt{13-x^2} = 2x$. 6.61. $h\sqrt{4r^2 \sin^2 \alpha - h^2}$. 6.62. $3\sqrt{3}$.

6.63. $\sqrt{a^2 + ab}$, $\sqrt{b^2 + ab}$. Пусть ABC — данный треугольник ($\angle C = 90^\circ$), CD — его высота, AK — перпендикуляр, опущенный из A на касательную, проходящую через C . Докажите равенство треугольников ACK и ACD . 6.64. $a^2 b^2 (a^2 + b^2) / (ab + a^2 + b^2)^2$. 6.65. $\frac{3}{8} (\sqrt{15} - \sqrt{3}) R^2$.

Из того, что касательная AM образует с хордой MK угол в 60° , следует равенство $MK = R\sqrt{3}$. Если $AL = LK = x$, то $AM^2 = AL \cdot AK = 2x^2$. Запишем теорему косинусов для $\triangle AMK$: $4x^2 = 2x^2 + 3R^2 - Rx\sqrt{6}$. Дальнейшее ясно. 6.66. 15,36. Общая хорда AB есть удвоенная высота треугольника O_1BO_2 , опущенная на O_1O_2 (этот треугольник прямоугольный с катетами 3 и 4 и гипотенузой $O_1O_2 = 5$). $AB = 24/5$, $\angle ABC = \angle O_1O_2K = \varphi$ (или $180^\circ - \varphi$) ($O_1K \parallel CD$, $O_2K \perp BD$).

Нетрудно доказать, что $O_1K = \frac{1}{2} CD = 4$. Значит, $\sin \varphi = 4/5$. Высота, опущенная из A на CD , равна $AB \sin \varphi = 24/5 \cdot 4/5$. 6.67. $AC = 6$, $BC = 4\sqrt{21}$, $AB = 2\sqrt{105}$. Пусть медианы пересекаются в точке K . Обозначим $x = AK = \frac{2}{3} AN$, $y = CK = \frac{2}{3} CM$. Значит, $x - y = 2$.

Площадь треугольника AKC равна $\frac{1}{3} S_{ABC} = 8\sqrt{5}$. Если $\angle AKC = \varphi$, то

$\sin \varphi = \sqrt{1-4/9} = \sqrt{5}/3$. Имеем систему $x - y = 2$, $xy = 48$, откуда $x = 8$, $y = 6$. Поскольку $\varphi = \arccos 2/3$ или $\varphi = \pi - \arccos 2/3$, то возможны два случая. В первом случае $AC^2 = AK^2 + KC^2 - 2AK \cdot KC \cos \varphi = 36$, $NC^2 = \frac{1}{4} BC^2 = KC^2 + KN^2 + 2KC \cdot KN \cos \varphi = 84$,

$AM^2 = \frac{1}{4} AB^2 = AK^2 + KM^2 + 2AK \cdot KM \cos \varphi = 2/3$, откуда $AC = 6$,

$BC = 4\sqrt{21}$, $AB = 2\sqrt{105}$ ($\angle C > 90^\circ$). Во втором случае $\cos \varphi = -2/3$,

$AC = 2\sqrt{41}$, $BC = 4\sqrt{5}$, $AB = 2\sqrt{41}$; этот треугольник остроугольный.

6.68. 8,1. Пусть катет AC образует со стороной квадрата угол φ (φ — наименьший угол), тогда BC образует с соответствующей стороной также угол φ . Сторона квадрата равна $AC \cos \varphi = 3 \cos \varphi$, но она также равна $AC \sin \alpha + BC \cos \varphi = 3 \sin \varphi + 2 \cos \varphi$, значит, $\cos \varphi = 3 \sin \varphi$.

6.69. $59 \frac{1}{2}$. Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\sphericalangle AC = 2\alpha$, $\sphericalangle CB = \pi - 2\alpha$, $\sphericalangle AE = \sphericalangle CE = \alpha$, $\sphericalangle CG = \sphericalangle GB = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\sphericalangle BF = \sphericalangle FA = \frac{\pi}{2}$. Поскольку $\sphericalangle ECG +$

$\sphericalangle AF = \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} = \pi$, то угол между диагоналями EF и AG

равен $\frac{\pi}{2}$. Диагонали AG соответствует дуга $ACG = \frac{\pi}{2} + \alpha$, значит, $AG =$

$$= 2R \sin \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right] = 13 \sin \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right]. \text{ Аналогично, } EF = 13 \sin \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right].$$

Площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2} AG \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 169 \sin^2 \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right] =$

$$= \frac{1}{4} \cdot 169 (1 + \sin \alpha) = \frac{1}{4} \cdot 169 \left[1 + \frac{5}{13} \right] = 59 \frac{1}{2}. \quad \mathbf{6.70.} \quad \pi - \arccos \frac{3\sqrt{5} - 1}{8}.$$

Пусть $\angle ABC = 2\varphi$. Из условия следует, что $2\varphi > 90^\circ$. Имеем $BO_1 = 3r/\sin 2\varphi$, $BO_2 = r/\sin \varphi$, $O_1O_2 = 4r$, $\angle O_1BO_2 = \varphi$. Запишем для $\triangle O_1BO_2$ теорему косинусов: $16r^2 = 9r^2/\sin^2 2\varphi + r^2/\sin^2 \varphi - 6r^2 \cos \varphi/(\sin 2\varphi \sin \varphi)$, или $16 = 9/\sin^2 2\varphi - 2/\sin^2 \varphi$, откуда $16 = 9/(1 - \cos^2 2\varphi) - 4/(1 - \cos 2\varphi)$, откуда находим $\cos 2\varphi$. **6.71.** $\sqrt{33} - 1$. Пусть биссектриса угла C пересекает AB в точке L . Докажите, что L лежит на продолжении AB . Обозначим через K и P точки пересечения CL с DM и DA соответственно, $BC = DA = LB = x$. Из подобия треугольников DKC и LKM имеем $DK/KM = DC/LM = 4/(x - 2)$, откуда $DK/DM = 4/(x + 2)$. Аналогично найдем $DP/DA = 4/x$. Из условия $DK/DM \cdot DP/DA = 1/2$, откуда $x^3 + 2x - 32 = 0$. **6.72.**

$2R^2(6 - \sqrt{3})/3$. Из условий следует, что $\angle ADC = 90^\circ$, $CD = AD = 2R$. Рассмотрим треугольник ABD . В этом треугольнике высота к AD равна $2R$; если $AL = x$, то $AB = 4x/\sqrt{3}$, а высота $DL = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Получаем уравнение (дважды выражая площадь ABD): $2R^2 = 2x\sqrt{4R^2 - x^2}/\sqrt{3}$, откуда $x = R$. Значит, $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 4R/\sqrt{3}$, $BC = AD -$

$- AB \cos 60^\circ = 2R - 2R/\sqrt{3}$ и т. д. **6.73.** $0,27 R^2$. Докажите, что AL — биссектриса угла BAC . Тогда $AB/AD = BL/DL = 5/4$. Если $AB = 5x$, то $AD = 4x$, $BD = 3x$. Затем рассмотрим прямоугольный треугольник OAB (O — центр окружности), в котором $OA = R$, $AB = 5x$, $AD = 4x$. Из равенства $AB \cdot AO = OB \cdot AD$ найдем $OB = 5R/4$ и т. д. **6.74.**

$(10\sqrt{3} - 12)R^2$. См. решение задачи **6.72**. В данной трапеции $\angle PQM = 75^\circ$. **6.75.** $15R^2\sqrt{15}/8$. Пусть O — центр окружности, $\angle BAD = \alpha$. Тогда $\angle OBL = 180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$, $AB = R \operatorname{ctg} \alpha/2$, $BL = 2R \sin \alpha$. Имеем уравнение $\operatorname{ctg} \alpha/2 = 8 \sin \alpha$, откуда $\sin^2 \alpha/2 = 1/16$

и т. д. **6.76.** $7\sqrt{3}/3$. Обозначим через M и N проекции K на OC и OB соответственно. $OMKN$ — прямоугольник, $OM = NK = 1$. Положим $ON = KM = x$, $OD = y$. Имеем систему $AD^2 = AK^2 = KD^2$ или $4 + y^2 = 9 + x^2 = (x + y)^2 + 1$ или $y^2 - x^2 = 5$, $2xy + x^2 = 3$. Умножим первое уравнение на 3, а второе на -5 и сложим, получим $3y^2 - 10yx - 8x^2 = 0$, откуда $y/x = 4$, $x = \sqrt{3}/3$, $y = 4\sqrt{3}/3$ и т. д. **6.77.** 48. **6.78.** 12.

6.79. б) $0 < \alpha < \pi/6$; в) $\operatorname{arctg}(2 + \sqrt{7})/3$; г) докажите, что при $0 < \alpha < \pi/6$ будет $\operatorname{tg} 3\alpha > 3 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$. Если же $\alpha \geq \pi/6$, то $3\alpha \geq \pi/2$, а $\beta < \pi/2$. **6.80.** б) $r = \frac{1}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)$; в) $\frac{\pi}{4}(5 - 2\sqrt{2})$. **6.81.** $\overrightarrow{BM} =$

$= -\vec{m} + \frac{1}{4}\vec{n}$. **6.82.** $1/2$. **6.83.** Пусть C и B — точки касания, CB — внешняя касательная к данным окружностям. $AD = CD$, $AD = DB$.

Значит, $AD = \frac{1}{2} CB$. Задача сводится к нахождению BC — общей внешней касательной к данным окружностям. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей ($O_1 B \perp BC$, $O_2 C \perp BC$). Проведем через O_1 прямую, параллельную BC , до пересечения с $O_2 C$ в точке K . Треугольник $O_2 O_1 K$ — прямоугольный с гипотенузой $O_1 O_2 = R + r$ и катетом $O_2 K = |R - r|$, тогда $BC = O_1 K = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$. **6.84.** 2.4. **6.85.** $\sqrt{3}$. **6.86.** $\sqrt{2p_1 p_2} - p_1$, $\sqrt{2p_1 p_2} - p_2$, $p_1 + p_2 - \sqrt{2p_1 p_2}$. **6.87.** 75° . Поскольку трапеция вписанная, то она равнобокая. Точка O — в середине меньшей дуги описанной около $ABCD$ окружности. Если радиус этой окружности равен r , то $AO = DO = r\sqrt{3}$. Значит, AOD — правильный треугольник, поэтому $\angle AED = \frac{1}{2} \angle AOD = 30^\circ$ и $\angle EAD = \angle EDA = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

6.88. 18; $9\sqrt{2}$. **6.89.** $\sqrt{5}$. **6.90.** 5 и 15. **6.91.** 29π . **6.92.** 120° . Имеем $BE = BA = 4$. Пусть $AE = 2x$, тогда $AM = EN = x$, $BM = BN = 4 - x$. Из подобия треугольников BMN и BAE получим $(4 - x)/4 = 2/(2x)$, откуда $x = 2$. **6.93.** $2 \arccos(2 \pm \sqrt{2})/4$. **6.94.** $\frac{3}{4} ab$. Проведем через C

прямую, параллельную AD . Эта прямая пересечет AB в середине AB — точке K . Треугольники ADC , CKA и KCB равновелики, $\angle ACB = 90^\circ$ (так как $AK = KB = KC$, то K — центр окружности, описанной около ACB). **6.95.** $(mn + nk + km)/a^2$. **6.96.** $3:2$ (от вершины B). Проведем через B прямую, параллельную AC , и обозначим через K ее точку пересечения с MN . Из подобия треугольников BNK и CMN найдем $BK = \frac{3}{4} MC = \frac{3}{2} MA$ и т. д. **6.97.** 13,5. Докажите, что площадь трапеции

равна площади треугольника со сторонами 5, $\sqrt{34}$, 9. **6.98.** 8. Докажите, что имеет место равенство $P_1^2 + P_2^2 = P^2$, где P — периметр всего треугольника, P_1 и P_2 — периметры двух меньших треугольников.

6.99. $R \frac{R-r-\sqrt{R^2-2Rr}}{R+r-\sqrt{R^2-2Rr}}$. Пусть O , O_1 , O_2 — центры данных кругов

с радиусами R , r и r соответственно, O_3 — центр искомого круга, радиус которого x . Имеем четырехугольник $OO_1O_3O_2$, в котором $OO_1 = OO_2 = R - r$, $O_1O_2 = 2R$, $O_1O_3 = O_2O_3 = r + x$, $OO_3 = R - x$. Если M — точка пересечения диагоналей этого четырехугольника, то $OM = \sqrt{R^2 - 2Rr}$, $MO_3 = \sqrt{x^2 + 2rx}$. Имеем

уравнение $OM + MO_3 = OO_3$, т. е. $\sqrt{R^2 - 2Rr} + \sqrt{x^2 + 2rx} = R - x$. **6.100.** $(4a^2 + b^2 + b\sqrt{b^2 + 8a^2})/(b^2 + b\sqrt{b^2 + 8a^2})$. Пусть $\angle EAC = \angle DAE = \varphi$. Для φ имеем уравнение $a \cos 2\varphi = b \cos \varphi$ или $a(2\cos^2 \varphi - 1) = b \cos \varphi$. Нам надо найти $S_{ADC}/S_{AEC} = DC/EC =$

$= \operatorname{tg} 2\varphi / \operatorname{tg} \varphi = 2\cos^2 \varphi / (2\cos^2 \varphi - 1)$. **6.101.** $a^2(2 - \sqrt{3})$. **6.102.** $6\sqrt{55}$.

6.103. $3 - \sqrt{3}$. **6.104.** $\sqrt{3} - 1$. **6.105.** $\sqrt{84} - 9$. Пусть радиус искомого окружности равен x , O_1 — ее центр. Тогда в треугольнике OO_1D имеем

$O_1D = 2x/\sqrt{3}$ (O_1D — биссектриса $\angle ADC$, расстояние от O_1 до AD равно x), $OO_1 = 2 - x$, $OD = \sqrt{3}$, $\angle O_1DO = 2\pi/3$. Записываем теорему косинусов относительно $\angle O_1DO$. **6.106.** $b + p$. По свойству описанного четырехугольника $MQ + BA = MB + AQ$. Значит, периметр $BAQM$ равен $2(MQ + BA)$. Аналогично, периметр $ABNP$ равен $2(NP + AB)$, а

их разность равна $2MQ - 2NP = 2P$. **6.107.** $\arctg \frac{4\sqrt{33} - 7\sqrt{7}}{37}$. Из

того, что $\angle NFH$ тупой, следует, что центр окружности — точка O — лежит по другую сторону от NH , чем AF . Из равенства $KA \cdot KF = KN \cdot KH$ найдем $KN = 2$, $KA = \sqrt{11} - 1$, $KF = KA + AF = (\sqrt{11} - 1) + 2 = \sqrt{11} + 1$, $KH = 5$. Значит, $NH = 3$. Хорды NH и AF удалены от центра соответственно на $\sqrt{7}/2$ и $\sqrt{3}$. Имеем $\tg \angle OKF = \sqrt{3}/(KA + \frac{1}{2}AF) = \sqrt{3}/\sqrt{11}$, $\tg \angle OKH = 1/\sqrt{7}$, $\tg \angle HKF =$

$= \tg(\angle OKF - \angle OKH) = (4\sqrt{33} - 7\sqrt{7})/37$. **6.108.** $10/3$. Пусть M и N — середины AD и DC соответственно, P и Q — центры окружностей, вписанных в AED и DEC соответственно. P и Q лежат на ME и NE . В треугольнике DME имеем $DM = 5/2$, $ME = 6$, $DE = 13/2$, DP — биссектриса угла MDE . Имеем $PE/MP = 13/5$. Значит, $PE = \frac{13}{18} ME = \frac{13}{3}$. Аналогично найдем $QE = 13/10$. **6.109.**

$\pi - \arccos \sqrt{15}/20$. Пусть $BD = x$, $DA = 4x$ ($BA = 5x$). Из равенства $BD \cdot BA = BE \cdot BC$ найдем $x = 2$. Теперь в треугольнике BDC известны все стороны ($BD = 2$, $BC = 5$, $DC = 4$), найдем $\cos \angle DBC = 13/20$.

Затем в треугольнике ABC найдем $AC = \sqrt{60}$ и $\angle ACB$. **6.110.**

$\pi - \arccos 1/\sqrt{6}$. **6.111.** $\sqrt{3}$. В решении используется следующий факт: если P — центр окружности, вписанной в треугольник KLM , то $\angle KPM = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle KLM$. Пусть теперь E и F — центры окружностей, вписанных в ABD и ACD . Имеем $\angle AED = \angle AFD = 135^\circ$. Значит, точки A , E , F и D лежат на одной окружности. Имеем (положим $\angle FAE = \angle FDE = \varphi$) $FE/\sin \varphi = AD/\sin 135^\circ$, откуда $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 30^\circ$. Четырехугольник $ABCD$ также вписанный; AD — диаметр этой окружности, $\angle BAC = 2\varphi = 60^\circ$, значит, $BC = AD \sin 60^\circ = \sqrt{3}$.

6.112. Можно. **6.113.** $2; 2\sqrt{3}$. Обозначим $LK = 2x$, $LM = 2y$, $\angle LO'K = 2\alpha$. Тогда (по условию) $\angle MON = \angle MO'N = 4\alpha$. Имеем $\tg \alpha = x/(3y)$ (из $\triangle LO'K$), $\tg 2\alpha = x/y$. Из равенства $\tg 2\alpha = 2\tg \alpha / (1 - \tg^2 \alpha)$ найдем $x^2/y^2 = 3$. **6.114.**

$\alpha^2 \sin \alpha \sin \beta / (2 \sin(\alpha + \beta))$. **6.115.** а) \sqrt{Rr} , б) $\sqrt{R/r}$. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, AM — хорда первой окружности. Обозначим $\angle AMN = \alpha$, $\angle ANM = \beta$. Тогда $\angle O_1MA = 90^\circ - \alpha$, $MA = 2R \sin \alpha$. Аналогично $NA = 2r \sin \beta$. а). Пусть ρ — радиус окружности, описанной около треугольника AMN . Имеем

$$\rho = AN/(2\sin \alpha) = r \sin \beta / \sin \alpha, \quad \rho = AM/(2\sin \beta) = R \sin \alpha / \sin \beta.$$

Таким образом, $\rho = \sqrt{r \sin \beta R \sin \alpha / (\sin \alpha \sin \beta)} = \sqrt{Rr}$. 6) C — середина MN , поскольку $MC^2 = CA \cdot CB = NC^2$. Треугольники MAC и NAC равновеликие. Значит, отношение расстояний от C до MA и NA равно $NA/MA = r \sin \beta / (R \sin \alpha) = r\rho/(Rr) = \sqrt{r/R}$. **6.116.**

$$h^2 \sin \beta / (2\sin \alpha \sin (\alpha + \beta)). \quad \mathbf{6.117.} \quad \sqrt{Rr}, \sqrt{r/R} \quad \mathbf{6.118.} \quad 2:3. \quad \mathbf{6.119.}$$

$3\sqrt{3}/4$. Из условия следует, что $\angle LKN = \angle MLN = 30^\circ$, значит, $\angle LNK = 30^\circ$ и т. д. **6.120.** $\sqrt{2}/3$. **6.121.** $8/(9\sqrt{5})$. O — центр окружности, M — середина AC . Последовательно находим:

$$AM = 2\sin (\arcsin 1/\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}, \quad BM = 4\sqrt{5}, \quad OM = 1/\sqrt{5},$$

$$BO = BM - OM = 3\sqrt{5}, \quad BE = \sqrt{BO^2 - OE^2} = 2/\sqrt{5} = BD. \quad \text{Если}$$

$$K \text{ — середина } DE, \text{ то } KE = BE \cdot OE/BO = 2/3, \quad BK = 4/(3\sqrt{5}),$$

$$S_{DBE} = BK \cdot KE = 8/(9\sqrt{5}). \quad \mathbf{6.122.} \quad \sqrt{3 + \pi/3}. \quad \mathbf{6.123.} \quad 6/13. \quad \mathbf{6.124.}$$

$4\sqrt{14}/\sqrt{55}$. Пусть $MP = PN = x$, $\angle MAP = \angle PAN = \alpha$. По теореме косинусов для треугольников MAP и PAN имеем систему

$$x^2 = 17 - 8 \cos \alpha, \quad x^2 = 20 - 16 \cos \alpha, \quad \text{из которой } x = \sqrt{14},$$

$\cos \alpha = 3/8$. **6.125.** Условия задачи противоречивы. Из равенства углов $\angle BEF = \angle BDC$ следует, что радиусы окружностей, описанных около треугольников CFD и BEF пропорциональны сторонам FC и BF , а поскольку отношение площадей соответствующих кругов равно 5, то

$BF = FC\sqrt{5}$ ($FC = x$, $BF = x\sqrt{5}$). Из условия также следует, что отношение площадей треугольников BDC и BEF равно $25/16$. Но эти треугольники подобны, BC и BF — сходственные стороны. Значит,

$$BC = \frac{5}{4} BF = \frac{5}{4} x\sqrt{5}. \quad \text{Теперь в треугольнике } BFC \text{ все стороны}$$

выражены через x . Кроме того, поскольку точки E , F , D и C расположены на одной окружности ($\angle BEF = \angle FDC$), то $\angle FCB = \angle FDE = 45^\circ$. Записав для треугольника BFC теорему косинусов (относительно угла $\angle FCB = 45^\circ$), получим противоречие. **6.126.** $6/23$. Пусть

$\angle OCA = \angle OAC = \varphi$. Тогда $\angle KOA = 2\varphi$, $\angle OKA = 90^\circ - 2\varphi$. По теореме синусов для треугольника KAC имеем $AK/AC = \sin \varphi / \sin (90^\circ - 2\varphi) = 5/23$. Из уравнения $5\cos 2\varphi - 23\sin \varphi = 0$

найдем $\sin \varphi = 1/5$ и т. д. **6.127.** $3(3\sqrt{3} - 4)/2$. **6.128.** $-\sqrt{15}$. Пусть O_1 и O_2 — центры вписанной окружности и окружности, касающейся

лучей CA и CB . По условию $r_1 = \sqrt{15}/3 < r_2 = 5\sqrt{5}/(3\sqrt{3})$. Проведем через O_1 прямую, параллельную CA , и опустим на нее из O_2 перпендикуляр O_2K . Получим прямоугольный треугольник O_1O_2K , у которого угол при вершине O_1 равен половине $\angle ACB$, гипотенуза

$$O_1O_2 = r_1 + r_2 = 8\sqrt{15}/9, \quad O_2K = r_1 - r_2 = 2\sqrt{15}/9. \quad \text{Если } \angle ACB =$$

$$= 2\alpha, \text{ то } \sin \alpha = (r_2 - r_1)/(r_2 + r_1) = 1/4, \text{ откуда } \cos \alpha = \sqrt{15}/4,$$

$\operatorname{tg} \alpha = 1/\sqrt{15}$, $\sin 2\alpha = \sqrt{15}/8$. Из условия и равенства $S = pr_1$ (S — площадь ABC , p — полупериметр) найдем $p = 9$. Пусть отрезки

касательных ко вписанной в ABC окружности из вершин A , B и C равны соответственно x , y , z . Поскольку $z \operatorname{tg} \alpha = r_1$, то $z = 5$. Значит, $x + y = p - z = 9 - 5 = 4$. Далее имеем

$S = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin 2\alpha$, или $3\sqrt{15} = \frac{1}{2} (5 + x)(5 + y) \frac{\sqrt{15}}{8}$. Имеем систему $x + y = 4$, $(5 + x)(5 + y) = 48$, из которой $x = 3$, $y = 1$.

(Из условия $AC > CB$ следует, что $x > y$). **6.129.** $\sqrt{6(4 + \sqrt{15})}/2$.

6.130. $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 5\sqrt{3}/3$. **6.131.** 7. Если O — центр окружности, то $QO \parallel AB$ ($\angle OQA = \angle QAO = \angle QAB$). Из подобия OKQ и ABK найдем $AB = 10 \frac{1}{2}$. Из треугольника BAO найдем $\cos \angle BAO =$

$= \frac{1}{2} AB/AO = 7/8$. Затем найдем BK (из $\triangle BAK$). **6.132.** $\sqrt{15}/2$. Пусть

$BM = 2x$, $DN = 3x$. Из подобия треугольников BCN и DAN получим $BN/BC = DM/AD$ и $(2x + MN)/3 = (3x + MN)/4$, откуда $MN = x$. Тогда N — середина BD и, следовательно, $CD = BC = AB = 3$. **6.133.**

3. Пусть $\angle BAF = \alpha$, $\angle AEC = 5\alpha$. Тогда $\angle ECF = \angle EAF = \alpha$. В треугольнике BEC углы при вершинах B и C равны 72° и α , а внешний угол при вершине E равен 5α . Имеем $5\alpha = 72^\circ + \alpha$, откуда $\alpha = 18^\circ$.

6.134. 24. Точка G — середина BC . Площадь треугольника ABC относится к площади EGC как $\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = 3:1$, разность их площадей равна по условию 8. Отсюда следует, что площадь $\triangle ABC$ равна 12. **6.135.**

$\frac{3}{2} (\sqrt{5} \pm 1)$. Обозначим через M точку пересечения окружности с прямой

BC . Возможны два случая расположения точки M : на продолжении CB за точку B и на отрезке CB . В каждом случае $BM = 3$, так как тре-

угольник ABM прямоугольный, с гипотенузой $AM = \sqrt{10}$ и катетом $AB = 1$. Обозначив $CB = x$, имеем в первом случае уравнение

$x(x + 3) = 9$, а во втором — уравнение $x(x - 3) = 9$. **6.136.** $2\sqrt{3}$.

Обозначим через M точку пересечения прямых AB и CD , через α — угол AMD . По свойству касательной и секущей имеем $MC \cdot MD = ME^2$. Умножим это равенство на $\sin^2 \alpha$, получим

$MC \sin \alpha \cdot MD \sin \alpha = (ME \sin \alpha)^2$. Но $MC \sin \alpha = 3$, $MD \sin \alpha = 4$, а $ME \sin \alpha$ — искомое расстояние. **6.137.** 189/25. Из условия следует, что диагонали AC и BD параллельны соответственно KL и LM , причем

$AC = \frac{2}{3} KL = 6$, $BD = 3LM = 9$. Пусть $\angle LKM = \alpha$, $\angle LMK = \beta$. Из

равенств $LM/(2\sin \alpha) = KL/(2\sin \beta) = R$ получим, что $\sin \alpha = \frac{3}{5}$,

$\sin \beta = \frac{4}{5}$. Ясно, что $\alpha < \beta$ и, следовательно, угол α — острый. Если

бы и угол β был острым, выполнялось бы равенство $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, что противоречит условию $KM < KL$. Значит, β — тупой угол. Таким

образом, $\angle KLM = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$, где $\alpha = \arcsin \frac{3}{5}$. Имеем

$\sin \angle KLM = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 7/25$. Площадь $ABCD$ равна

$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{7}{25} = \frac{189}{25}$. **6.138.** $9\frac{3}{5}$. Обозначим через K точку пересечения прямых BE и AD . Поскольку $AB/BC = AO/OC = 3/2$, то $AK = 9$, $DK = 1$ и, следовательно, $CE/ED = BC/DK = 6$. Площадь $\triangle ADC$

равна 28; площадь $\triangle COE$ составляет от нее $\frac{2}{5} \cdot \frac{6}{7} = \frac{12}{35}$ и равна

$\frac{12}{35} \cdot 28 = 9\frac{3}{5}$. **6.139.** $10\pi + 4\sqrt{3}$. Пусть R и r ($R > r$) — радиусы данных окружностей, O — центр большей из них. Поскольку $\angle BMA = 15^\circ$, то $\angle MOA = 30^\circ$, $BM = R\sqrt{3}$. Площадь искомой фигуры (она состоит из сектора, соответствующего углу 30° , окружности радиусом R и двух равных прямоугольных треугольников OMB и ONB) равна $\left[\frac{5}{6}\pi + \sqrt{3} \right] R^2$. Осталось найти R . Имеем $AK = 2r \sin 15^\circ$,

$AM = 2R \sin 15^\circ$, т. е. $(r + R)2 \sin 15^\circ = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Отсюда

$r + R = 2 + \sqrt{3}$. Кроме того, из прямоугольного треугольника OMB получим (поскольку $OB = r + 2R$, $\angle MOB = 30^\circ$), что

$(R + 2r)\sqrt{3}/2 = R$. Из получившейся системы $R = 2\sqrt{3}$. **6.140.**

$\sqrt{a(a+b)}$. Треугольники ABC и ACM подобны ($\angle ACM = \angle ADC = \angle ABC$). Последнее равенство следует из того, что точки A, C, B и D лежат на одной окружности). Значит, $AC/AB = AM/AC$. **6.141.** 6π .

Окружность, проходящая через A, B и C , является для треугольника PQR вписанной. Сумма радиусов данных кругов равна полупериметру треугольника PQR . Докажем, что из всех треугольников PQR с данным периметром и углом Q наибольший радиус вписанной окружности имеет равнобедренный треугольник. Рассмотрим окружность, касающуюся сторон PR и продолжений сторон QP и QR . Пусть M и N — точки касания этой окружности с QP и QR . Нетрудно заметить, что отрезок $QM = QN$ равен полупериметру треугольника PQR . Понятно также, что радиус вписанной в PQR окружности будет наибольшим в том случае, когда эта окружность коснется построенной нами окружности. А это имеет место, если $QP = QR$. **6.142.** $\sin \alpha / \cos \alpha$. Докажем, что $\triangle ANM$ подобен $\triangle ABC$. Пусть $\angle ABD = \alpha$; тогда $\angle AMD = \angle MAD = 90^\circ - \alpha$, $\angle ADM = 2\alpha$. Но $\angle ANM$ — угол, вписанный в окружность с центром D ,

поэтому $\angle ANM = \frac{1}{2} \angle ADM = \alpha = \angle ABC$. **6.143.** $\sqrt{6}$. **6.144.** $41\sqrt{2}/16$.

6.145. $8/\sqrt{5}$. Проведя высоту LD в трапеции, получим равнобедренный прямоугольный треугольник KLD , в котором $KD = LD = 1$, $KL = \sqrt{2}$.

Далее находим $LN = \sqrt{26}$, $AL = \sqrt{10}$. Радиус окружности будет равен $R = LN/(2 \sin 45^\circ) = \sqrt{13}$. Треугольники KLA и BNA подобны, $BN = KL \cdot AN/LA = 2/\sqrt{5}$; искомое расстояние равно $\sqrt{R^2 - BN^2/4} =$

$= \sqrt{13 - 1/5} = 8/\sqrt{5}$. **6.146.** $\frac{8}{5} \sqrt{\frac{7}{19}}$. **6.147.** \sqrt{pq} . Докажите равенство

$\angle OQC = \angle COP$ (где O — центр описанной окружности). Из него следует подобие треугольников COP и CQO . **6.148.** 30. Обозначим

$AC = x$, $BC = y$, $AB = z$. Имеем систему: $z^2 = x^2 + y^2$, $x + y + z = 90$, $xy = 10(x + z)$ (последнее уравнение получается из равенства $S_{ABC} = S_{ACO} + S_{ABO}$, где O — центр окружности). Из первого уравнения $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$; учитывая второе и третье уравнения, получим $z^2 = (90 - z)^2 - 20(x + z)$, или $405 - 10z - x = 0$, откуда $x = 405 - 10z$, $y = 9z - 315$. Дальнейшее

решение ясно. 6.149. $81(\sqrt{3} - 1)/2$. В треугольнике PMN угол M равен 15° , угол N равен 30° . 6.150. 2. 6.151. 2. Для треугольника AOD отрезок OM является отрезком биссектрисы внешнего угла при вершине O , следовательно, $DM/AM = DO/AO = 4/6 = 2/3$ (значит, точка D лежит на отрезке AM). Проведем через D прямую, параллельную AO , и обозначим через K точку ее пересечения с BM . Пусть $AB = y$, $BO = 6 - y$. Из подобия $\triangle BOC$ и $\triangle KDC$ имеем $DK = BO/3 = (6 - y)/3$, из подобия $\triangle KDM$ и $\triangle BAM$ имеем $KD = 2AB/3 = 2y/3$, откуда $y = 2$ и отношение площадей треугольников AOD и BOC равно

$AO/BO \cdot DO/CO = 2$. 6.152. $4\sqrt{6}/(9 + 4\sqrt{3})$. Пусть $\angle KAN = \varphi$; $\varphi = \angle KAB + \angle BAN$. Поскольку $\angle AKB = \angle BAN$ и $\angle KAB = \angle BNA$, то треугольники KAB и BNA подобны, причем $\angle KBA = \angle ABN = \pi - \varphi$ и $KB/BA = BA/BN = KA/AN = \sqrt{5}/2$. Если $AB = x$, то $KB \cdot BN = AB^2 = x^2$, $S_{KBN} = \frac{1}{2} KB \cdot BN \sin 2\varphi = \frac{1}{2} x^2 \sin 2\varphi =$

$= x^2 \operatorname{tg} \varphi / (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = x^2 \sqrt{6}/5$. Чтобы найти x^2 , запишем теорему косинусов для $\triangle KBA$ ($KB = x\sqrt{5}/2$, $\cos \angle KBA = -\cos \varphi = -\sqrt{3}/5$): $x^2 + \frac{5}{4} x^2 + 2x^2 \sqrt{5} \sqrt{3}/(2\sqrt{5}) = 5$, откуда $x^2 = 20/(9 + 4\sqrt{3})$. 6.153. На

диагонали AC . Если бы точка M была вне AC , то либо угол BCA , либо угол BAC был бы больше угла BME , поскольку был бы внешним углом в треугольнике BMC или BMA , но $\angle BCA = \angle BDA = 50^\circ$, а $\angle BAC = \angle BDC = 60^\circ$. 6.154. 3. Из условия следует, что $\sphericalangle KL = \sphericalangle MN = \sphericalangle KP$, $\sphericalangle LM = \sphericalangle NP$ (рассматриваются дуги, не содержащие других точек). Кроме того, поскольку диагонали трапеции $KMNP$ пересекаются под прямым углом, то $\sphericalangle KP + \sphericalangle MN = \pi$. Отсюда $\sphericalangle KL = \sphericalangle MN = \sphericalangle KP = \pi/2$, $\sphericalangle LM = \sphericalangle NP = \pi/4$. Зная углы треугольника KLM и радиус его описанной окружности, находим его площадь.

Глава 7. Стереометрия

7.1. $6\sqrt{41}$. 7.2. $a^2\sqrt{3}$, $a^2\sqrt{2}/12$, $a\sqrt{2}/2$, $a\sqrt{6}/4$, $a\sqrt{6}/12$.

7.3. $a^3\sqrt{1 + 2 \cos \alpha}/(24 \sin \alpha/2)$, $\arccos(\sqrt{3} \operatorname{tg}(\alpha/2)/3)$, $2 \arcsin(1/(2 \cos \alpha/2))$, $\sqrt{3} a\sqrt{1 + 2 \cos \alpha}/(12 \sin(\alpha/2 + \pi/3))$,

$\sqrt{3} a/(4 \sin(\alpha/2) \sqrt{1 + 2 \cos \alpha})$. 7.4. $a^3\sqrt{\cos \alpha}/(6 \sin \alpha/2)$, $\arccos(\operatorname{tg} \alpha/2)$, $2 \arcsin(1/(\sqrt{2} \cos \alpha/2))$, $\sqrt{2} a\sqrt{\cos \alpha}/(4 \cos(\alpha/2 - \pi/4))$,

$a/(4 \sin(\alpha/2) \sqrt{\cos \alpha})$. 7.6. $ab/4$. 7.7. а) $9a^2/8$; б) $a^2\sqrt{3}/2$; в) $3a^2\sqrt{3}/4$. 7.8. Если сечение перпендикулярно оси цилиндра, то утверждение

задачи очевидно. Для любой другой плоскости, пересекающей ось в той же точке, объемы частей цилиндра и площади частей боковой поверхности не меняются. 7.9. $3/8$. 7.10. а) $1/(10 + 6\sqrt{3})$; б) $3/(\pi(5 + 3\sqrt{3}))$. 7.11. $\pi a^2 b^2 / (3\sqrt{a^2 + b^2})$. 7.12. $2(\sqrt{6} + 1)/(3(\sqrt{3} + 1))$. 7.13. $\pi R^3 \sqrt{3}/24$. 7.14. а) $\arccos 1/3$; б) 90° ; в) 60° . 7.15. $V/2$. 7.16. а) $a^2 \sqrt{2}$; б) $a^2 \sqrt{3}$. 7.17. 45° . 7.18. $9\sqrt{91}/4$. 7.19. $4\sqrt{2}/3$, $\sqrt{2}/(\sqrt{3} + 1)$, $\sqrt{2}$. 7.20. 54. 7.21. $9\sqrt{3}/25$. 7.22. $(3 - \sqrt{3}) a/4$. Центры шаров располагаются на одной диагонали куба. Пусть это диагональ MN , O_1 и O_2 — центры шаров, их радиусы — r . Тогда $MN = a\sqrt{3}$, $MO_1 = r\sqrt{3}$, $O_1O_2 = 2r$, $O_2N = r\sqrt{3}$. Имеем $a\sqrt{3} = 2r\sqrt{3} + 2r$. 7.23. $\frac{1}{2} \arccos(\sqrt{3} - 1)$. Пусть R , h , l — радиус основания, высота и образующая конуса; тогда $h^2 = l^2 - R^2$, $2l^2 + l^2\sqrt{3} = 4R^2$ (из условия, что угол в осевом сечении 150°). Высота сечения равна $l\sqrt{2}/2$. Значит, если φ — угол наклона, то $\sin^2 \varphi = 1 - \sqrt{3}/2$. 7.26. $2\sqrt{3}$. 7.27. $9/4$. 7.28. $(9 + 4\sqrt{6})/5$. 7.29. $3^4 \sqrt{3}/4$. 7.30. $a(\sqrt{6} - 1)/10$. 7.31. 2. Пусть две вершины A и B правого треугольника принадлежат нижнему основанию. Обозначим его сторону через $2x$. Спроектируем треугольник на нижнее основание. Получим равнобедренный треугольник ABC_1 , в котором $AB = 2x$, $AC_1 = BC_1 = \sqrt{4x^2 - 2}$. По теореме синусов найдем радиус окружности, описанной около треугольника ABC_1 (через x), получим $R = \frac{1}{2} (4x^2 - 2)/\sqrt{3x^2 - 2} = 1$. 7.32. $a^3 \sqrt{3}/6$. 7.33. $\frac{1}{3} a^2 (\sqrt{15} + \sqrt{6})$. 7.34. $3 \sqrt{\frac{3V}{4\pi}} \left[\frac{\sqrt{-1 - 2 \cos \alpha} + 1}{\sqrt{-1 - 2 \cos \alpha}} \right]$. Если a — сторона основания, то последовательно найдем высоту в боковой грани, опущенной на боковое ребро: $a\sqrt{3}/(2 \sin \frac{\alpha}{2})$, апофему боковой грани: $b = a\sqrt{3}/(2 \sqrt{-1 - 2 \cos \alpha})$. А поскольку расстояние от центра основания до стороны равно $a\sqrt{3}/2$, то высота h делится центром вписанного шара в отношении (по теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника) $(h-r):r = b:(\sqrt{-1 - 2 \cos \alpha})$, $h:r = (h-r)/r + 1$ и т. д. 7.35. $2 \arccos(\sin \frac{3\pi}{10} / \sin \frac{\varphi}{2})$. 7.36. $a^3 \sqrt{\cos \alpha} / (\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2})$. 7.37. Sh . 7.38. $4\sqrt{3}/27$. 7.39. Если $\alpha < 60^\circ$, то $V = \frac{3}{2} \sqrt{3} l^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \times (\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3}) / (2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3})^3$. При других α будет $V = 0$. В самом деле, пусть $h = l \cos \frac{\alpha}{2}$, $R = l \sin \frac{\alpha}{2}$ — высота и радиус основания конуса, y — высота призмы, x — сторона основания. Имеем $(h - y)/h = x/b$, $y = h(R - x)/r$. Полная поверхность призмы равна $S = 3x^2 \sqrt{3} +$

$+ 6yx = 3x^2 (\sqrt{3} - 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + 6xl \cos \frac{\alpha}{2})$. Причем $0 \leq x \leq l \sin \frac{\alpha}{2}$.

Если $\sqrt{3} - 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \geq 0$, наибольшее значение достигается при наибольшем $x = l \sin \frac{\alpha}{2}$. Если $\sqrt{3} - 2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} < 0$, но

$l \cos \frac{\alpha}{2} / (2 \operatorname{ctg} \alpha - \sqrt{3}) \geq l \sin \frac{\alpha}{2}$ (абсцисса вершины параболы правее точки $x = l \sin \frac{\alpha}{2}$), то наибольшее значение S также достигается при $x = l \sin \frac{\alpha}{2}$. При других значениях α наибольшее значение достигается

при $x = l \cos \frac{\alpha}{2} / (2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \sqrt{3})$. 7.40. $\pi\sqrt{3}/3$. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник ABC : $\angle B = 90^\circ$, $AC = 6$. Биссектриса угла C равна $2\sqrt{3}$. Но радиус окружности, по которой сфера

пересекает плоскость основания, также равен $2\sqrt{3}$. Значит, сфера пересекается с основанием ABC по дуге, соответствующей углу $\pi/6$, окружности с радиусом $2\sqrt{3}$. 7.41. В четыре раза. 7.42. $1/2$. 7.43. 1. 7.44.

$\frac{\pi R^3(k+1)^2}{3(k-1)}$. 7.45. $\sqrt{3} h^2/(k^2 - 1)$. Пусть φ — угол наклона боковых

граней пирамиды к основанию. Докажите, что $\cos \alpha = 1/k$. 7.46.

$\frac{1}{3} \pi b^3 m^2 \sqrt{1 - m^2}$. 7.47. $7\sqrt{39}/36$. 7.48. $\frac{1}{3} b^3 \sin 2\alpha \cos^2 \beta \sin \beta$.

7.49. $a^2\sqrt{3}/6$. 7.50. $2 \arcsin \sqrt{(1 + \cos^2 \alpha)/2}$. 7.51.

$2 \sqrt{\frac{1}{3} V \sin \frac{\alpha}{2} / (1 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2})}$. 7.52. $\frac{2}{3} r^3 \sin^2 \alpha \sqrt{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \alpha}$ 7.53.

$H \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. 7.54. 2. 7.55. $1/12$. Если O — центр куба, K — середина

MB' , то искомое расстояние равно проекции OK на MB' . 7.56.

$\arctg \sqrt{5}$. Угол CBS является линейным углом двугранного угла между плоскостями ABC и ABS . Плоскость, образующая равные углы с ABC и ABS , должна пересекать BC и BS в точках, равноудаленных от B . Эта плоскость не может проходить через середину BC (докажите). Значит, эта плоскость должна пересекать продолжение BC за точку B в

такой точке M , что $BM = \frac{1}{2} BC$. Пусть K и L — середины AC и BS .

Прямая MK пересекает AB в точке P такой, что $BP = \frac{1}{4} AB = \frac{1}{2}$.

Задача сводится к нахождению двугранных углов при LP и MP в пирамиде $BLMP$, в которой $BM = BL = 1$, $BP = 1/2$. Все плоские

углы при вершине B прямые. 7.57. $5\sqrt{3}/12$. Рассмотрим плоскость α , проходящую через M , N и C_1 . Эта плоскость проходит через середину AK (докажите). Плоскость β , проходящая через K , L и C , пересекает A_1B_1 в середине MB_1 . Плоскости α и β параллельны (докажите). Значит, они искомые. Каждая из них отсекает от призмы $7/24$ ее объема. (Продолжим плоскость KCL до пересечения с BB_1 в точке P .

Высота пирамиды $KBCP$ в два раза больше высоты призмы, а площадь основания вдвое меньше. Объем пирамиды составляет $1/3$ объема призмы. От этой пирамиды еще отрезается часть, объем которой есть $1/8$ объема пирамиды). Следовательно, между плоскостями — $5/12$

объема призмы. 7.58. $5\sqrt{11}/4$. Докажите, что объем этой пирамиды не меняется при перемещении отрезков MN и PQ соответственно по прямым CA и BS . (Если PQ фиксирован, а MN перемещается, то не меняется площадь треугольника MNP и расстояние от Q до плоскости MNP). Переместим точку M в C , а P — в B . Тогда N перейдет в N' , $CN' = 5$, Q перейдет в Q' , $BQ' = 3$; $S_{CBN'} = \frac{5}{4} S_{CAB} = 5$.

Расстояние от Q' до плоскости ABC равно $\frac{3}{4}h$, где h — высота

пирамиды. 7.59. $\sqrt{91}/24$. Пусть для определенности точка K симметрична B , L симметрична C . Рассмотрим проекцию данной конфигурации на плоскость, проходящую через A_1A_2 перпендикулярно ACC_1A_1 (рис. 1. На рисунке для простоты проекции обозначены теми же буквами, что и проектируемые точки, со штрихом). Прямая $F'E'$ пересекает $A'A_1$ в точке M' такой, что $A'M' = \frac{2}{3} A'A_1 = \frac{2}{3}$, а отрезок A_1B' — в точке N' , $A_1N' = \frac{1}{8} A_1B'$. Нетрудно убедиться, что наша прямая не пересекает грань BCC_1B_1 исходной призмы: $M'N' = \frac{1}{3} E'N' = \frac{1}{3} F'E'$. Значит, искомый отрезок равен $\frac{1}{3} EF = \sqrt{91}/24$. 7.60. $2\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $V = 8$. Докажите, что плоскость SAB

перпендикулярна $ABCD$. 7.61. $8/\sqrt{7}$. Пусть BB_1 и DD_1 касаются шара в точках P и Q , отрезок PQ перпендикулярен BB_1 и DD_1 . Кроме того, $BP = BC = DC = DQ$. Значит, $BPQD$ — прямоугольник. Итак, боковые ребра призмы перпендикулярны диагонали BD . Пусть M — точка касания шара с ребром AA_1 , K — середина PQ ($PQ = BD = 6$), O — центр шара. Точки A , M , K , O , C лежат в плоскости, перпендикулярной $ABCD$. Пусть радиус шара равен x , $\angle MAC = 2\varphi$. Имеем $x = AC \operatorname{tg} \varphi = 8 \operatorname{tg} \varphi$, $OK = \sqrt{x^2 - 9}$, $KM = x \pm \sqrt{x^2 - 9}$. Но KM равен расстоянию от середины AC до AM , т. е. $KM =$

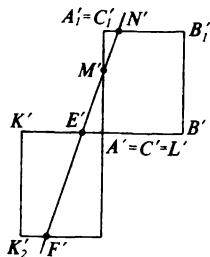


Рис. 1

$= 4 \sin 2\varphi = 8 \operatorname{tg} \varphi / (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = 64x / (64 + x^2)$. Получаем для x

уравнение $x \pm \sqrt{x^2 - 9} = 64x / (64 + x^2)$, или $\pm \sqrt{x^2 - 9} = x^3 / (64 + x^2)$ (значит, знак в KM — «—»). Для решения этого уравнения перед возведением в квадрат удобно сделать замену $x = 8y$.

7.62. $27\pi/80$. Условия задачи позволяют сделать следующее заключение. Образующей цилиндра будет отрезок DK , где K — точка на SC такая, что DK параллельна SB . Радиус основания цилиндра равен радиусу окружности, вписанной в треугольник AMC , где M — основание перпендикуляра, опущенного из A (из C) на SB . При этом точка касания этой окружности со сторонами CM и AM делит их в отношении 3:2 (от вершин A и C). Если теперь сторона основания пирамиды равна a , то в треугольнике ACM стороны AM и CM делятся точками касания со вписанной окружностью на отрезки $a/2$ и $a/3$. Нетрудно найти радиус этой окружности (радиус основания цилиндра). Он равен $a/4$. Боковое ребро пирамиды $3a/\sqrt{11}$. Образующая цилиндра равна $9a/5\sqrt{11}$. Высота пирамиды равна $4a/\sqrt{33}$. **7.63.**

$28\pi/1215$. См. решение предыдущей задачи. **7.64.** $10\sqrt{13}$, 30 , $10\sqrt{14/13}$. Пусть P — середина AB . Из условия следует, что NK содержит B , причем $BK = MA$, $BN = LA$. Так как $\angle PAM$ тупой ($MA < ML$), то тупой также $\angle KBP$. Значит, ближайшей к K точкой квадрата $ABCD$ будет B , $KB = 5$. (Здесь учитываем, что $NB = NC$). Ближайшей к M является проекция M на AD . Поскольку $MA = BK = 5$, то проекция

MA на AD равна $\sqrt{25 - 12} = \sqrt{13}$, т. е. MA образует с AD угол φ ,

$\cos \varphi = \sqrt{13}/5$. Положим $AB = x$, $KN = y$. Проекция $BN = y - 5$ на CB равна x (так как $NB = NC$), а угол между BN и CB равен φ ,

значит, $(y - 5) \sqrt{13}/5 = x$. Второе уравнение получим, записав теорему

косинусов для треугольника PNB ($\angle PNB = 45^\circ$, $PN = y/\sqrt{2}$, $PB = x$,

$NB = y - 5$): $x^2 = y^2/2 + (y - 5)^2 - y(y - 5)$ и т. д. **7.66.** $63\sqrt{6}/8$.

Пусть плоскость α пересекает прямую AB в точке P . Обозначим $AB = a$, $AA_1 = b$, $AK_1 = xa$, $A_1M = yb$. Последовательно найдем

$AP = xa/(2x - 1)$, $K_1P = 2xKK_1/(2x - 1) = x\sqrt{14}/(2x - 1)$, $MK_1 =$

$= \frac{7}{2}(y + 1)$, $y/(y + 1) = K_2K_3/K_1P = 3(2x - 1)/(8x)$. Из последнего

равенства найдем $y = (6x - 3)/(2x + 3)$. Записав теорему косинусов для треугольника K_1AP , получим (после преобразования)

$14 = (4x^2 - 6x + 3)a^2$. Запишем равенство $PM^2 - K_1M^2 = PA^2 - K_1A^2$. Заменяем PM^2 по теореме косинусов из $\triangle PK_1M$, $\cos \angle PK_1M =$

$= \frac{1}{\sqrt{56}} \cdot \frac{14x^2}{(2x - 1)^2} - \frac{7(y + 1)x}{2(2x - 1)} = \left[\frac{x^2}{(2x - 1)^2} - x^2 \right] a^2$. В по-

лучившемся соотношении заменим y и a через x ,

$\frac{14x^2}{(2x - 1)^2} - \frac{28x^2}{(2x - 1)(2x + 3)} = \frac{4x^2}{(2x - 1)^2} (x - x^2) \frac{14}{4x^2 - 6x + 3}$. Далее

имеем $\frac{5 - 2x}{2x + 3} = \frac{4(x - x^2)}{4x^2 - 6x + 3}$. Из этого уравнения найдем $x = 5/6$.

Далее $y = 3/7$, $a = 3\sqrt{2}$, $b = 7\sqrt{2}/4$. 7.66. $125\pi\sqrt{2}/3$. 7.67. 90° . 7.68. $\arctg\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. 7.69. $125\pi\sqrt{2}/3$. 7.70. 72. 7.71. $\operatorname{Hctg} 54^\circ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 7.72. $\frac{1}{3}\sqrt{4/(3\sin^2 F) - 1}$. 7.73. 3. 7.74. 60° . 7.75. 54. 7.76.

$\frac{1}{2}a^2\sin\alpha\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\beta}$ или $a^2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}+4\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\beta}$ в зависимости

сти от того, является ли угол B ромба тупым или острым. 7.77.

$R = 2$, $H = 4$. 7.78. $N(7/3; -2/3; -11/3)$. 7.79. $\frac{1}{12}b^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi$. 7.80.

8. 7.81. $\arctg(9h/(a(5\sin\alpha+2\sqrt{5}\cos\alpha)))$. Задача сводится к определению расстояния от точки O до BC . В равнобедренном треугольнике ABK высота BO делит боковую сторону в отношении $AO:OK = 8:1$. Положим $OK = x$, $AO = 8x$, $BK = 9x$. Выражая BO из треугольников ABO и KBO и приравнявая эти выражения, найдем $x = a/12$. Если $\angle OBA = \varphi$, то $\sin\varphi = 2/3$; $\angle OBC = 180^\circ - \alpha - \varphi$.

Расстояние от O до BC равно $OB\sin(\alpha+\varphi) = a\frac{\sqrt{5}}{3}(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi) = a\frac{\sqrt{5}}{3}\left[\frac{\sqrt{5}}{3}\sin\alpha + \frac{2}{3}\cos\alpha\right]$. 7.82. $\arctg\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right]$;

$\arctg\left[\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right]$. 7.83. 390. 7.84. $a^3/4$. 7.85. $41^2\sqrt{3}$. 7.86. $25R^3\sqrt{3}/144$.

Если φ — угол между апофемой боковой грани и высотой пирамиды, то $\sin\alpha = 1/4$. Таким образом, расстояние от центра сферы до боковой грани равно $d = R\sin\varphi = R/4$. Пусть x — высота призмы. Радиус окружности, описанной около основания призмы, равен

$\rho = \sqrt{R^2 - (d+x)^2}$. Сторона основания призмы равна $\rho\sqrt{3}$. Объем

призмы будет равен $V = 3\rho^3\sqrt{3}x/4 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\left[R^2 - \left(\frac{R}{4} + x\right)^2\right]x =$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4}\left[\frac{15}{16R^2x - \frac{1}{2}Rx^2 - x^3}\right]$. Приравняв к нулю производную,

получим уравнение $\frac{15}{16}R^2 - Rx - 3x^2 = 0$, откуда $x = \frac{5}{12}R$. 7.87.

$\sqrt{14}/3$. Докажите, что искомое сечение проходит через C . (В этом сечении будет параллелограмм. В любом другом параллельном сечении

от этого параллелограмма отрезается часть). 7.88. $2\sqrt{3}$. 7.89.

$(4\pi q\sqrt{3/9})^2$. 7.90. $\pi\sqrt{3}/32$. Пусть сторона основания пирамиды равна 1. В сечении будет равнобокая трапеция с основаниями 1 и

$3/4$. В эту трапецию можно вписать окружность. Из этого условия следует, что ее боковые стороны равны $7/8$. Рассмотрим прямоугольный треугольник SKC (K — середина BC). Катет $KC = 1/2$. Если M делит SC в отношении $3:1$, то $KM = 7/8$. Пусть $SC = 4x$, $MC = x$. Запишем теорему косинусов для

треугольника KMC $\left[\cos \angle KCM = \frac{1}{8x} \right] : \frac{49}{64} = x^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}, x^2 = \frac{41}{64}.$

Высота пирамиды равна $\sqrt{41/4 - 1/2} = \sqrt{39/2}$. Высота трапеции

$\sqrt{49/64 - 1/64} = \sqrt{3/2}$. Рассмотрим прямоугольный треугольник SHL (H – основание высоты, L – середина CD), P – точка на SL ,

$SP : PL = 3 : 1$. Имеем $HP = \sqrt{3/2}$, $PL = SL/4 = \sqrt{39/4 + 1/4}/4 =$

$= \sqrt{10}/4$. Радиус основания конуса равен $\frac{1}{2} HP = \sqrt{3}/4$. Угол между

образующей и плоскостью равен $\varphi = \angle PHL$. Запишем через теорему

косинусов для $\triangle PHL$: $\frac{10}{16} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \cdot \cos \varphi = \sqrt{3}/4$,

$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{13}{3}}$. Высота конуса равна $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{13}{4}} = \sqrt{13}/4$ и т. д. **7.91.**

$1/(2\sqrt{2})$. **7.92.** $a^3 \sqrt{4}/2$. **7.93.** $3a \sqrt{6}/2$. Обе части равны. **7.94.**

$\operatorname{arctg} \left[\frac{2q \sqrt{3}}{1+q} \operatorname{ctg} \varphi \right]$. **7.95.** $\frac{1}{2} l^2 \cos^2 \beta \sin 2\alpha$ или

$\frac{3}{4} l^2 \cos \beta \cos^2 \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \beta \cos^2 \alpha}$ или $\frac{3}{4} l^2 \cos \beta \sin \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \beta \sin^2 \alpha}$.

Искомое сечение должно быть параллельно или основанию пирамиды или одной из боковых граней и делит пополам пересекаемые им ребра.

7.96. $\arcsin (1/\sqrt{3})$. **7.97.** $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$. **7.98.** $2 \frac{7}{18}, \frac{11}{18}$.

7.99. $\sqrt[4]{720}, \sqrt[4]{80}, \sqrt[4]{80}$. **7.100.** $\sqrt{3/7}$. **7.101.** $16 \sqrt{3}/3$. **7.102.**

$2 \arcsin \frac{\sqrt{7}-1}{2\sqrt{3}}$. **7.103.** $2 \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **7.104.** $\sqrt[3]{(4V \cos^2 \frac{\pi}{7})/\pi}$. Пусть

r и h – радиус основания и высота цилиндра. Имеем $\pi r^2 h = V$. Пусть $\varphi = \pi/7$. Полная поверхность призмы равна $7r^2 \sin 2\varphi + 14 rh \sin \varphi =$
 $= 7r^2 \sin 2\varphi + \frac{14V}{\pi r} \sin \varphi$. Последнее выражение минимально, если

$r = \sqrt[3]{V/(2\pi \cos \varphi)}$, $h = \sqrt[3]{4V \cos^2 \varphi/\pi}$. **7.105.** $\sqrt{3h \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 1}/\cos \alpha}$.

7.106. $\frac{1}{16} H(4R^2 - H^2) 3\sqrt{3}$. **7.107.** $\frac{1}{12} ab^2 \operatorname{tg} \alpha$. Проведите через DC плоскость, перпендикулярную AB . В сечении будет равнобедренный

треугольник, углы при DC равны α . **7.108.** $\frac{4\sqrt{3}}{9} h^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha$. **7.109.**

$3\pi/32$. **7.110.** $U(\sqrt[3]{V/U} - 1)$. **7.111.** $1 : 1$. Пусть проведенная плоскость пересекает AB в точке K , $A'B$ – в точке M . Если $BK = x$, то $BM = x\sqrt{2}/(x+1)$. Объем пирамиды CB_1BK равен $x/6$ (KBC – основание пирамиды). С другой стороны, если основание – $KB'C$, то

высота равна $BM \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2} x/(x+1)$. Площадь основания $KB'C$

равна $\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}}$. Получаем для x уравнение $\frac{x}{6} = \frac{1}{6} \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{x+1}$,

из которого найдем $x = \frac{1}{2}$. 7.112. $2\sqrt{41}$. Проведем через BB' плоскость, перпендикулярную BM . Обозначим через A_1 , C_1 и N_1 проекции на нее точек A , C , N . Задача сводится к определению расстояния от точки B (проекция M совпадает с B) до прямой A_1N_1 .

Нетрудно найти $BC_1 = 1/\sqrt{5}$ (расстояние от C до BM), $A_1B = 2BC_1 = 2/\sqrt{5}$. А поскольку $C_1N_1 = 1/2$, то $A_1N_1 = \sqrt{A_1C_1^2 + C_1N_1^2} = \sqrt{41}/2\sqrt{5}$. Расстояние от C_1 до A_1N_1 равно $3/\sqrt{41}$. Искомое расстояние составляет от него $2/3$. 7.113. $\arctg \sqrt{5}$. 7.114. 6π . Из

условий следует: $AD = \sqrt{BD^2 - BA^2} = \sqrt{3}$, $CD = AD = \sqrt{3}$, как касательные к сфере из одной точки, аналогично $CB = AB = 1$, $AC = \sqrt{2}$. Опустим из A и C перпендикуляры на DB . Они попадут в

одну точку K , $AK = CK = \sqrt{3}/2$. Радиус искомой сферы равен радиусу окружности в плоскости ACK , касающейся AK и CK в точках A и C .

Если $\angle AKC = 2\varphi$, то $\sin \varphi = \sqrt{2/3}$, $R = AK \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{6}/2$. 7.115.

$\frac{8}{7}(2\sqrt{2} - 1)$. Рассмотрим треугольник SCM , SH — высота этого треугольника (H на CM по условию), K — середина SC . Имеем $4\sqrt{13} = MK \geq MO = \sqrt{MH^2 + HO^2} = \sqrt{SH^2 \operatorname{ctg}^2 30^\circ + 16} = 4\sqrt{13}$.

Таким образом, $\angle SMC = 30^\circ$, а точки C и H совпадают. Далее, CE и CF — основания перпендикуляров, опущенных из C на AS и BS (докажите). Обозначим $AS = x$, $BS = y$. Тогда $SE = CS^2/AS = 64/x$, $SF = 64/y$, и поскольку $ES/BS = 64/xy = FS/AS$, то треугольники SEF и SBA подобны. Значит, $64/xy = ES/BS = EF/AB = 1/2\sqrt{5}$,

$xy = 128\sqrt{5}$. Второе уравнение получим из того, что в треугольнике ABS (стороны x , y , $16\sqrt{2}$) медиана к стороне AB равна 16. Получим уравнение $x^2 + y^2 = 16 \cdot 3$. Поскольку $2xy = 16^2\sqrt{5}$, то

$(x + y)^2 = 16^2(3 + \sqrt{5}) = 16^2((\sqrt{5} + 1)/\sqrt{2})^2$, $(x - y)^2 = 16^2((\sqrt{5} - 1)/\sqrt{2})^2$. Пусть $x \geq y$, тогда $x = 16\sqrt{5/2}$, $y = 16/\sqrt{2}$. Треугольник ABS прямоугольный с гипотенузой AS . Значит, прямоугольным является и треугольник ABC , $BC = 8$, $AC = 24$. Объем пирамиды равен $8^3\sqrt{2}/3$, полная поверхность — $8^2(4 + \sqrt{2})$. Радиус шара равен $8\sqrt{2}/(4 + \sqrt{2}) = \frac{8}{7}(2\sqrt{2} - 1)$. 7.116. $1/(\sqrt{21} + 3)$. 7.117. $9/4\sqrt{17}$.

7.118. $5\sqrt{2/3}$. Рассмотрим треугольник SMC , где M — середина AB . $MC = 6$, $SM = 2\sqrt{13}$, $\angle SMC = \arccos \frac{2}{\sqrt{13}}$. По теореме косинусов

найдем $SC = 2\sqrt{10}$. Пусть P — центр ABC , P лежит на MC , причем

$PC = 4$, K – середина SC . Радиус искомой сферы равен диаметру окружности, описанной около PCK , в котором $PC = 4$, $CK = \sqrt{10}$, $\cos \angle PCK = \sqrt{2/5}$. Имеем $\sin \angle PCK = \sqrt{3/5}$, $PK = \sqrt{10}$, $R = \sqrt{10}/\sqrt{3/5} = 5/\sqrt{2/3}$. 7.119. $36\pi/11\sqrt{11}$. Поскольку в прямоугольник $KLMN$ можно вписать окружность, то $KLMN$ – квадрат. Треугольники KPL и NMQ являются равнобедренными. Это следует из того, что стороны KL и NM (основания) касаются вписанной окружности в серединах. Поскольку $KP = PL$, $NQ = MQ$, то проекция PQ на плоскость $KLMN$ параллельна KN . Следовательно, так как по условию PQ параллелен плоскости $KLMN$, то PQ параллелен KN . Трапеция $NKQP$ является равнобедренной: в нее можно вписать окружность, которая касается основания KN в середине. Значит, шар касается PQ в середине. Учитывая равенство касательных, проведенных к шару из одной точки, найдем $KP = PL = NQ = QM = 2$. Радиус искомого шара равен радиусу окружности, описанной около треугольника с вершинами в серединах KN , LM и PQ . 7.120. $4\sqrt{3}/27$. Рассмотрим сечение, проходящее через B_1E и DF . В сечении будет прямоугольник BB_1M_1M . Положим $BB_1 = 2x$, $B_1M_1 = y$. Из подобия треугольников B_1M_1E и BDF найдем $BF = \frac{3}{4}y$, $M_1E = \frac{4}{3}x$. Значит, $FM = \frac{1}{4}y$, $EM = \frac{2}{3}x$. Записав теорему Пифагора для треугольников B_1M_1E и FME , получим систему $y^2 + \frac{16}{9}x^2 = 1$, $\frac{1}{16}y^2 + \frac{4}{9}x^2 = \frac{1}{12}$, из которой найдем $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Объем призмы будет наибольшим, если y есть высота основания. 7.121. $183/40$. Пусть ребро куба равно a , $CF = \lambda a$. Возьмем систему координат с началом в точке C . Ось Ox направим по CB , ось Oy – по CD . В этой системе координат центр первой сферы $O_1(a - 13, a - 13, 13)$, центр второй сферы $O_2(5, a - 5, 5)$. Плоскость проходит через точки $C_1(0, 0, a)$, $E(0, -a, 0)$, $F(\lambda a, 0, 0)$. Ее уравнение будет $x/\lambda - y + z - a = 0$. Поскольку отношение радиусов окружностей сечения равно отношению радиусов сфер ($2,6 = 13 : 5$), то таким же будет и отношение расстояний от центров сфер до плоскости, т. е. $|(a - 13)/\lambda - (a - 13) + 13 - a| = 2,6|5/\lambda - (a - 5) + 5 - a| \cdot |a - 13| \cdot |1/\lambda - 2| = 2,6|5/\lambda - 2a + 10|$. Но $O_1O_2 = 18$, откуда $(a - 18)^2 + 128 = 324$, $a - 18 = \pm 14$. Но по условию $a \geq 13$, т. е. $a = 32$. Получаем уравнение $19|1/\lambda - 2| = 13/5 \cdot |5/\lambda - 54|$, откуда $\lambda = 40/223$ (для другого решения $\lambda < 0$). 7.122. $\frac{3}{2}\sqrt{183}$. 7.123. Пусть $SD = 1$, $AD = m$. Обозначим через K точку пересечения плоскости основания конуса с AS (основание конуса лежит в плоскости BCK и совпадает с окружностью, вписанной в BCK). Пусть Q – центр основания конуса, SO – высота пирамиды. Легко найдем $DQ = m/3$, $OA = 2m/3$, $DB = m\sqrt{3/3}$, $SA = SB = \sqrt{SD^2 + DB^2} = \sqrt{1 + m^2/3}$. Из того, что основание конуса вписано в $\triangle CBK$, а его вершина – точка A , следует, что $\angle KBA = \angle DBA = 60^\circ$. Если $\alpha = \angle KAB = \angle SBD$, то $\cos l =$

$$\begin{aligned}
 &= DB/SB = m/\sqrt{3 + m^2}. \quad \text{По теореме синусов} \quad AK/\sin \pi/3 = \\
 &= AB/\sin(\alpha + \pi/3) = BK/\sin \alpha, \quad \text{откуда} \quad AK = AB \sin \frac{\pi}{3} / \sin(\alpha + \\
 &+ \frac{\pi}{3}) = 2m/(\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha) = 2m/(\sqrt{3}/\sqrt{3 + m^2} + m\sqrt{3}/\sqrt{3 + m^2}) = \\
 &= 2m\sqrt{3 + m^2}/(\sqrt{3}(m + 1)), \quad BK = \frac{2}{\sqrt{3}} m \sin \alpha / (\frac{1}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha) = \\
 &= 4m/(\sqrt{3} + 3 \cos \alpha / \sin \alpha) = \frac{4}{\sqrt{3}} m/(m + 1). \quad \text{Далее} \quad DK = \sqrt{BK^2 - DB^2} =
 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{16}{3} m^2/(m + 1)^2 - m^2/3} = m/(m + 1) \cdot \sqrt{15 - 2m - m^2}/3.$$

Поскольку BQ — биссектриса $\angle DBK$, то $(DQ = r) \quad r/(DK - r) = DB/BK$,
 $r = DK \cdot DB/(DB + BK) = m/(m + 1) \times$
 $\times \sqrt{(15 - 2m - m^2)/3} \cdot m\sqrt{3}/3 \cdot (m\sqrt{3}/3 + 2m/(\sqrt{3}(m + 1))) =$
 $= m/(m + 3) \cdot \sqrt{(15 - 2m - m^2)/3}. \quad \text{Поэтому} \quad \text{а)} \quad S_{\text{бок}}/S_{ABC} =$

$$\begin{aligned}
 &= \pi r \cdot AD/(DB \cdot AD) = \pi r/DB = \pi \sqrt{15 - 2m - m^2}/(m + 3); \quad \text{б)} \quad \text{от } 0 \text{ до} \\
 &\pi\sqrt{15}/3; \quad \text{в)} \quad 0 < m \leq 1. \quad 7.124. \quad \sqrt{3} \text{ или } 19\sqrt{3}/25. \quad \text{Заметим, что} \\
 &\text{двугранные углы при основании пирамиды равны } 60^\circ. \quad \text{Пусть } O_1 \text{ и} \\
 &O_2 - \text{центры шаров, } x - \text{радиус шара } S_1, \quad 3x - \text{радиус шара } S_2, \\
 &O_1O_2 = 4x. \quad \text{Учитывая, что } O_1 \text{ и } O_2 \text{ лежат в плоскости, проходящей} \\
 &\text{через } AC \text{ и образующей угол } 30^\circ \text{ с плоскостью } ABC, \text{ можно доказать,} \\
 &\text{что прямая } O_1O_2 \text{ перпендикулярна } AC. \quad \text{Пусть } P_1 \text{ и } P_2 - \text{точки каса-} \\
 &\text{ния шаров с плоскостью } ABC. \quad P_1 \text{ лежит на биссектрисе угла } C, \\
 &P_1P_2 \perp AC. \quad \text{Если } P_1P_2 \text{ пересекает } AC \text{ в точке } K, \text{ то } P_1K = x\sqrt{3}, \\
 &P_2K = 3x\sqrt{3}, \quad CK = 3x. \quad \text{Рассмотрим треугольник } BSM, \text{ где } M - \\
 &\text{середина } AC. \quad \text{Центр } O_2 \text{ находится на расстоянии } MK \text{ от этой плос-} \\
 &\text{кости, } MK = |\sqrt{3} - 3x|. \quad \text{Значит, плоскость } BSM \text{ пересекает сферу } S_2
 \end{aligned}$$

по окружности радиусом $\rho = \sqrt{9x^2 - (\sqrt{3} - 3x)^2} = \sqrt{6\sqrt{3}x - 3}$. Пусть O'_2 — центр этой окружности, N — проекция O'_2 на BM . Имеем $O'_2N = 3x$, $NM = P_2K = 3x\sqrt{3}$. Найдем расстояние d от O'_2 до прямой BS . Пусть для определенности $NM = 3x\sqrt{3} \leq BM = 3$, $\varphi = \angle SBM$, $\cos \varphi = 2/\sqrt{7}$. Обозначим через L точку пересечения NO'_2 с BS . Имеем $ML = BN \tan \varphi = (3 - 3x\sqrt{3})\sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}(1 - x\sqrt{3})/2$, $LO'_2 = |NL - NO'_2| = |3\sqrt{3}/2 - 9x/2 - 3x| = 3|\sqrt{3} - 5x|/2$. Расстояние от O'_2 до BS будет $d = LO'_2 \cos \varphi = 3|\sqrt{3} - 5x|/\sqrt{7}$. По условию хорда, высекаемая окружностью с центром O'_2 и радиусом ρ , равна $6/\sqrt{7}$, т. е. $\rho^2 - d^2 =$

9/7. Получаем уравнение $6\sqrt{3}x - 3 - 9(3 - 10\sqrt{3}x + 25x^2)/7 = 9/7$ или $75x^2 - 44\sqrt{3}x + 19 = 0$, откуда $x_1 = \sqrt{3}/3$, $x_2 = 19\sqrt{3}/75$. 7.125. 1, $11/(37 \pm 4\sqrt{6})$. Пусть P – середина ребра KN . Плоскость MLP содержит центры шаров O_1 и O_2 , при этом $O_2P = \sqrt{7}$. Пусть радиус первого шара равен x , а второго $3x$. Обозначим через Q , E_1 и E_2 соответственно проекции P , O_1 и O_2 на ML . Нетрудно найти $PQ = 2\sqrt{3}$, $O_1E_1 = x\sqrt{3}$, $O_2E_2 = 3x\sqrt{3}$, $O_1O_2 = 4x$, $E_1L = x\sqrt{6}$. Расстояние от O_2 до PQ будет $l = \sqrt{7 - (2\sqrt{3} - 3x\sqrt{3})^2}$. Расстояние от O_1 до PQ равно $m = \sqrt{6|1 - x|}$, наконец, расстояние от O_1 до O_2E_2 равно $\sqrt{(4x)^2 - (3x\sqrt{3} - x\sqrt{3})^2} = 2x$. При некотором выборе знаков выполняется равенство $\pm l \pm d \pm m = 0$ или $\pm\sqrt{-5 + 36x - 27x^2} = \pm 2x \pm \sqrt{6|1 - x|}$. После возведения в квадрат получим $-37x^2 + 48x - 11 = \pm 4x\sqrt{6|1 - x|}$ или $(x - 1)(11 - 37x) = \pm 4x\sqrt{6|1 - x|}$. 7.126. Пусть SK – высота, опущенная на AB . Обозначим $AB = a$, $SK = x$, $BC = y$, $KB = z$. Пусть далее φ – угол поворота рассматриваемой плоскости, определенный таким образом, что при $\varphi = 0$ плоскость проходит через C , а при $\varphi = \pi/2$ через S , $0 \leq \varphi < \pi$. Возникают 3 случая: 1) $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. В этом случае проекция пирамиды совпадает с проекцией треугольника ABC , – это будет треугольник ABC_1 (C_1 – проекция C). Площадь проекции равна $\frac{1}{2} ay \cos \varphi$. При $\varphi = \varphi_0$ проекция S – точка S_1 – лежит на AC_1 , рассматриваемая плоскость перпендикулярна плоскости ASC . Нетрудно найти, что $\operatorname{tg} \varphi_0 = (a - z)/a \cdot y/x$. 2) $\varphi_0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$. Проекция есть четырехугольник ABC_1S_1 . Его площадь есть сумма площадей треугольников ABS_1 и S_1BC_1 . Она равна $\frac{1}{2} ax \sin \varphi + \frac{1}{2} zy \cos \varphi$. 3) $\pi/2 \leq \varphi < \pi$. В этом случае площадь проекции равна $\frac{1}{2} ax \sin \varphi - \frac{1}{2} ay \cos \varphi$. Понятно, что наибольшей площадь может быть лишь в третьем случае (так как $a > z$), а наименьшей при $\varphi = \varphi_0$ (на каждом участке изменения φ площадь является выпуклой вверх функцией, а значит наименьшее значение должно достигаться на границе соответствующего интервала изменения). Поскольку наибольшее значение функции $A \cos \varphi + B \sin \varphi$ равно $\sqrt{A^2 + B^2}$, получим систему: $ay = 28$ (по условию), $\frac{1}{2} \sqrt{(ax)^2 + (ay)^2} = 21$, $\frac{1}{2} ay \cos \varphi_0 = 6\sqrt{5}$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = (a - z)/a \cdot y/x$. Далее находим: $ax = 14\sqrt{5}$, $\cos \varphi_0 = 3\sqrt{5}/7$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = 2/(3\sqrt{5})$, $zy = 56/3$. Из первого и последнего равенств находим $z = \frac{2}{3}a$. Но по условию $\angle ASB$ прямой,

т. е. $x^2 = (a - z)z = \frac{a}{3} \cdot \frac{2}{3} a$, $x = a\sqrt{2/3}$. А поскольку $ax = 14\sqrt{5}$, то

$$a^2 = 21\sqrt{10}. \text{ Объем пирамиды равен } \frac{1}{3} axy = \frac{1}{3} (ax)(ay)/a = \\ = \frac{1}{3} \cdot 14\sqrt{5} \cdot 28 / (\sqrt{21} \cdot 4\sqrt{10}) = \frac{56}{3} \sqrt{\frac{7}{3} \cdot 4 \cdot \frac{5}{2}}. \quad 7.127. \quad 2^4 \sqrt{5/3}. \quad 7.128. \quad \pi \sqrt{7/9}.$$

Обозначим через Q центр основания конуса, M — его вершина, рассматриваемое сечение MPL . Понятно, что точки P и L не могут находиться на прямой CD . (Тогда на этой же прямой находился бы и центр основания конуса — точка Q .) Пусть на CD находятся P и M . Спроектировав наш чертеж на плоскость, проходящую через SO параллельно BC (при этом точки C, D, P, M спроектируются в одну точку, также в одну точку спроектируются точки O и F , а также B и A), найдем, что $OQ = \frac{1}{4} SO = \sqrt{3}/4$ ($SQ = \frac{5}{4} SO$), а точка L находится

на расстоянии $2OQ = \sqrt{3}/2$ от плоскости $ABCD$. Для доказательства этого утверждения на этом проекционном чертеже (обозначая проекции точек так же, как и на пирамиде, но со штрихом), проведем через C' ($=D' = P'$) перпендикуляр к BC до пересечения с $F'E'$ в точке K . Из того, что $S'E' = 2E'C'$, получим $C'K = \frac{1}{2} S'O' = \sqrt{3}/2$. Но $O'Q'$ — средняя линия треугольника $M'KL'$ (все на проекционном чертеже). Затем рассмотрим аналогично проекцию на плоскость, проходящую через SO параллельно AB . На этом чертеже опустим перпендикуляр $L''L_1$ на $A''B''$. Поскольку $SL'' = \frac{3}{2} SA''$ (L'' удалена от $A''B''$ на $\frac{1}{2} SO$), то $L_1O = \frac{3}{2} A''O = 3/4 = OP''$. Нетрудно найти

расстояние от Q до D . По теореме Пифагора это расстояние будет равно $\sqrt{OQ^2 + \frac{1}{4} BC^2} = \sqrt{7}/4$. Но это расстояние является высотой в треугольнике PQM (из точки Q). Зная теперь в прямоугольном треугольнике PQM высоту, опущенную на гипотенузу PM , и проекцию катета PQ на гипотенузу ($= \frac{3}{4}$), найдем катеты $PQ = 1$ и $MQ = \sqrt{7}/3$,

а затем и объем конуса. 7.129. $125\pi/4$. 7.130. $(9 + 10\sqrt{3})/8$. Обозначим через O центр сферы, Q — точку касания этой сферы с плоскостью ABC . Пусть $AQ = x$, $BQ = y$, $CQ = z$. Рассмотрим треугольник AFO . Пусть P — точка касания сферы с прямой AF . По условию P находится на продолжении AF за точку A . Нетрудно найти $PA = AQ = x$, $AF = \sqrt{9 + 16} = 5$, $PO = R$, $PF = x + 5$. Кроме того, из треугольника OFM , где M — центр треугольника EFG , найдем $FO^2 = (R + 4)^2 + y^2$. Таким образом, $(x + 5)^2 + R^2 = (R + 4)^2 + y^2$, или $(x + 5)^2 - y^2 = 16 + 8R$. Аналогично получаем равенства $(y + 5)^2 - z^2 = 16 + 8R$, $(z + 5)^2 - x^2 = 16 + 8R$. Покажем, что тогда $x = y = z$. Допустим, что $x > y$. Учитывая положительность x, y и z , из первых двух равенств получаем, что $y > z$. Тогда из второго и третьего равенств будет следовать, что $z > x$. Получили противоречие.

Значит, $x = y = z = \sqrt{3}$. Таким образом, $R = \frac{1}{8} ((x+5)^2 - y^2 -$

$- 16) = (9 + 10\sqrt{3})/8$. 7.131. 5/18. Заметим, что если точка касания шара, вписанного в трехгранный угол $SABC$ (S – вершина), лежит на биссектрисе угла ASB , то $\angle ASC = \angle BSC$ (рис. 2). В самом деле, пусть точки касания лежат на прямых SP , SE и SF . Если SP – биссектриса ASB , то $\angle ASC = \angle ASF + \angle FSC = \angle ASP + \angle ESC = \angle PSB + \angle ESC =$

$= \angle BSE + \angle ESC = \angle BSC$. Обозначим $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \alpha$. Поскольку плоские углы при вершине M все различны (они равны $\frac{\pi}{2}$, 3α , $\frac{\pi}{2} - \alpha$), то вписанный шар может касаться в центре вписанной окружности лишь грани KLN . В соответствии с предварительным замечанием, плоские углы при вершинах K , L и N (рис. 3), отличные от углов треугольника KLN , попарно равны. Обозначим $\angle NKM = \angle LKM = x$, $\angle KNM = \angle LNM = y$, $\angle KLM = \angle KLM = z$. Из треугольника KNM имеем $x + y = \pi - \angle NKM = \frac{\pi}{2}$. Аналогично $x + z = \pi - 3\alpha$, $y + z =$

$= \frac{\pi}{2} + \alpha$. Из полученной системы найдем $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $y = 2\alpha$, $z = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Пусть F – проекция K на плоскость MNL , P – проекция

K на ML . Поскольку $\angle NKM = \frac{\pi}{2}$, то и $\angle NMF = \frac{\pi}{2}$. Имеем $PK = KM = \sin 3\alpha = \frac{5}{4} \sin 3\alpha$, $PM = \frac{5}{4} \cos 3\alpha$, $PF = PM \operatorname{tg} (\frac{\pi}{2} - \angle NML) = \frac{5}{4} \cos 3\alpha \operatorname{tg} \alpha$, и, наконец, $KF = \sqrt{PK^2 - PF^2} = \frac{5}{2} \sin \alpha \sqrt{2 \cos 2\alpha}$. По теореме синусов $LM = MK \sin x / \sin z = \frac{5}{4} \cos 2\alpha / \cos \alpha$, $NM = MK \operatorname{tg} x = \frac{5}{4} \operatorname{ctg} 2\alpha$. Объем пирамиды равен $\frac{1}{6} MN \cdot ML \cdot KF \sin \angle MNL = \frac{125}{192} \operatorname{ctg} 2\alpha \cos 2\alpha \sin \alpha \sqrt{2 \cos 2\alpha}$, а поскольку $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$, $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{4}{3}$, то объем будет

равен $\frac{5}{18}$. 7.132. 3. Докажем, что если A и D лежат на окружности

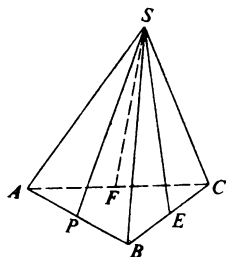


Рис. 2

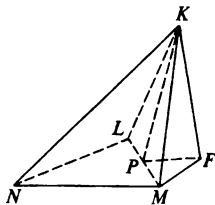


Рис. 3

одного основания, то и S лежит на той же окружности. В самом деле, если M – середина AD , то по условию $SM = \frac{1}{2} AD \leq \frac{5}{3}$. А если бы S лежала на окружности другого основания, то было бы $SM \geq 2$ (2 – высота цилиндра). Из этого следует, что никакие три из вершин основания пирамиды не могут лежать на окружности одного основания, ибо в этом случае на этой же окружности лежали бы все четыре вершины основания пирамиды, а значит, на ней бы лежала бы и вершина S . Далее, поскольку из всех пар прямых, образованных при попарном соединении точек A, B, C и D , не пересекаются лишь прямые AD и BC , то A и D лежат в плоскости одного основания цилиндра (там же расположена и точка S), B и C – другого.

Рассмотрим проекцию нашей пирамиды на плоскость основания цилиндра, содержащего A, D и S (рис. 4, B' и C' – проекции B и C). Поскольку C' – проекция C , то $\angle C'DS = 90^\circ$, AD – диаметр основания цилиндра: $AD = \frac{10}{3}$, $B'C' = BC = \frac{4}{5} \cdot \frac{10}{3} = \frac{8}{3}$. Если K – проек-

ция B' на AD , то $AK = \frac{1}{2} (AD - B'C') = \frac{1}{3}$, $KD = 3$, $KB' = \sqrt{AK \cdot KD} = 1$. Так как SC' – диаметр окружности, то высота в треугольнике ASD равна $KB' = 1$. Значит, площадь треугольника ASD равна $\frac{5}{3}$. Объем пирамиды $ASDC$ (ASD – ее основание, высота равна

высоте цилиндра) равен $\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{10}{9}$. Объемы пирамид $ADCS$ и $ABCS$ относятся как площади треугольников ADC и ABC , а значит, как $AD : BC$. Таким образом, объем пирамиды $ABCS$ равен $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$, а

объем данной пирамиды равен $\frac{5}{3} + \frac{4}{3} = 3$. **7.133.** $8\sqrt{2}$. Покажем

сначала, что точки, равноудаленные от боковых граней данной пирамиды, лежат на одной из трех прямых l_1, l_2, l_3 таких, что прямая l_1 проходит через S перпендикулярно $ABCD$; прямые l_2 и l_3 проходят через S и соответственно параллельны AC и BD . Для этого рассмотрим прямой параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$, центр которого совпадает с S (рис. 5). Плоскости боковых граней пирамиды $SABCD$ являются диагональными сечениями этого параллелепипеда. Они разбивают

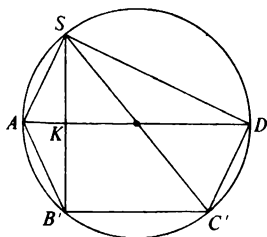


Рис. 4

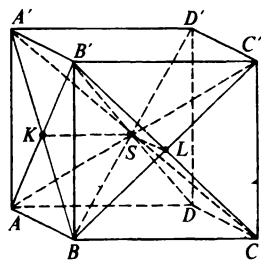


Рис. 5

параллелепипед, а при продолжении и все пространство на части (14 частей; впрочем, число частей не имеет значения). Понятно, что если центр сферы лежит внутри той части, которая содержит $ABCD$ (или $A'B'C'D'$), то этот центр лежит на прямой l_1 . Если этот центр лежит в той части, которой принадлежит ребро BB' (или DD'), то он находится на прямой l_3 , параллельной BD , поскольку, как легко видеть, эта прямая является пересечением биссекторных плоскостей четырехгранного угла с ребрами SB, SB', SK и SL . Аналогично, для частей, содержащий ребра AA' и CC' центр расположен на прямой l_2 . Покажем, что центр не может быть расположен в других частях. Рассмотрим, например, трехгранный угол с ребрами SB, SC и SL . Любая точка внутри этого угла не может быть равноудаленной от плоскостей SBC и SAD , поскольку биссекторные плоскости этих плоскостей не содержат внутренних точек этого угла: одна из них проходит через S и середины AB и DC , а другая проходит через S и параллельна $ABCD$. Рассмотрим теперь 3 случая:

1) Центр O сферы лежит на прямой l_1 . Он не может быть внутри пирамиды, поскольку центр ромба (его высота равна 4) удален от сторон на расстояние 2, а значит, все точки на высоте пирамиды удалены от боковых граней на расстояние меньше 2. Покажем, что центр сферы не может лежать и на продолжении высоты пирамиды за точку P (P — центр ромба). В самом деле, поскольку высота ромба равна 4, то все точки прямой l_1 удалены от плоскостей боковых граней нашего параллелепипеда (грани $ABB'A', BCC'B', CDD'C', DAA'D'$) на расстояние 2, т. е. в рассматриваемом случае (центр вне параллелепипеда) центр сферы будет удален от плоскостей боковых граней на расстояние больше 2.

2) Центр сферы лежит на прямой l_2 . Тогда расстояние от центра до AC равно 2. Значит, $AB = \frac{3}{\sqrt{2}}$. В прямоугольном треугольнике ABP

(P — центр ромба) имеем: гипотенуза $AB = \frac{3}{\sqrt{2}}$, высота, опущенная на

гипотенузу, равна 2. Если $AP = u$, $BP = v$, то $u^2 + v^2 = \frac{9}{2}$, $uv =$

$= \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 2 = 3\sqrt{2}$. Эта система несовместна, поскольку $(u - v)^2 =$

$= u^2 + v^2 - 2uv = \frac{9}{2} - 6\sqrt{2} < 0$.

3) Центр лежит на прямой l_3 . Высота пирамиды равна радиусу сферы

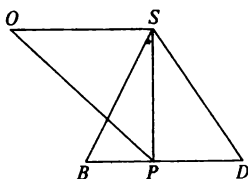


Рис. 6

и равна 2. А поскольку расстояние от центра ромба до его сторон также равно 2, то расстояние от центра ромба до боковых граней равно

$\sqrt{2}$. Пусть O – центр шара, $SO = x$, $PD = y$. Рассмотрим плоскость SBD (рис. 6): мы предполагаем, что O лежит на луче, выходящем из S и пересекающем BB'). Поскольку расстояния от P и O до плоскостей SAD и SCD пропорциональны PD и SO , то $\frac{x}{2} = \frac{y}{\sqrt{2}}$, т. е. $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Расстояние от O до AC равно $OP = \sqrt{x^2 + 4}$. В прямоугольном треугольнике ABP имеем $AP = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $OP = \frac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + 4}$, $PB = PD = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

Высота, опущенная на гипотенузу, равна 2. Нетрудно получить уравнение (так как $AP = 2AB/PB = 3\sqrt{x^2 + 4}/x$) $9(x^2 + 4)/x^2 + x^2/2 = \frac{9}{8}(x^2 + 4)$, или $5x^4 - 36x^2 - 36 \cdot 8 = 0$, откуда $x^2 = 12$, $x = 2\sqrt{3}$,

$AB = 3\sqrt{2}$. Площадь $ABCD$ равна $12\sqrt{2}$, объем пирамиды равен $8\sqrt{2}$.

7.134. $\frac{\pi}{2}$. Удобно вместо данного трехгранного угла с ребрами AB , AD и AC рассмотреть угол с ребрами AB_1 , AD_1 и AC_1 , где B_1 и D_1 симметричны B и D относительно A . В новом трехгранном угле $\angle B_1AD_1 = \angle BAD = \frac{\pi}{4}$, $\angle CAD_1 = \pi - \angle CAD = \frac{\pi}{4}$, $\angle CAB_1 = \pi -$

$-\angle CAB = \frac{\pi}{3}$. Возьмем на AB_1 точку M так, что $AM = AC$. Опустим из C и M перпендикуляры на AD_1 . Они попадут в одну точку K ; $\angle CKM$ – линейный угол соответствующего двугранного угла. Если $AC = AM = 1$, то $CM = 1$, $CK = MK = \sqrt{2}/2$. Значит, $\angle CKM = \frac{\pi}{2}$.

7.135. $\frac{1}{3} R\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) \operatorname{ctg} \varphi$. 7.136. $12\sqrt{2}$. Спроектируем точки A , B , C ,

D на плоскость, перпендикулярную PR . Получаем, что $ABCD$ – параллелограмм ($AB \parallel CD \parallel KN$; $BC \parallel AD \parallel LM$). 7.137. 12. Пусть расстояние между l и m равно d и общий перпендикуляр к l и m пересекает прямую l в точке O . Пусть φ – угол между прямыми l и m . Рассматривая l как ось координат, будем считать, что точки A , B и C имеют на l координаты, соответственно, x , $x + 18$ и $x + 32$. Для величин x , d и φ имеем систему уравнений $(x \sin \varphi)^2 + d^2 = 144$, $(x + 18)^2 \sin^2 \varphi + d^2 = 225$, $(x + 32)^2 \sin^2 \varphi + d^2 = 400$. Вычитая первое уравнение из второго и третьего, получим (после сокращений) $4(x + 9) \sin^2 \varphi = 9$, $(x + 16) \sin^2 \varphi = 4$, откуда $x = 0$, $\sin \varphi = \frac{1}{4}$.

Глава 8. Тригонометрия

Форма ответа может зависеть от выбранного пути решения. В таких случаях следует обязательно проверить совпадение разных форм ответа (это само по себе – хорошая задача).

Везде, где не оговорено противное, $k, m, n, l, p, r \in \mathbb{Z}$.

Произвольный угол. Определения тригонометрических и обратных**тригонометрических функций.** 8.1. Через 1 ч $5\frac{5}{11}$ мин. К искомому

моменту минутная стрелка совершит ровно на 1 оборот больше часовой.

8.2. а) $\sin 1 < 1$; б) $\sin 1 > 0,5$; в) $\operatorname{tg} 1 > 1$; г) $\operatorname{ctg} 1 < 1$;д) $\sin 0,63 < \cos 0,87$. Заметим, что $\cos 0,87 = \sin \left[\frac{\pi}{2} - 0,87 \right]$ исравним $0,63$ и $\frac{\pi}{2} - 0,87$, т. е. $0,63 + 0,87 = 1,5$ и $\frac{\pi}{2}$. Так как $1,5 < \frac{\pi}{2}$,а функция $y = \sin x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ возрастает, то $\sin 0,63 < \cos 0,87$;е) $\sin 0,91 < \cos 0,57$; ж) $\sin 1,4 < \cos 0,11$; з) $\sin \frac{5\pi}{12} > \cos \frac{\pi}{4}$, посколькуку $\sin \frac{5\pi}{12} > \sin \frac{4\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$; и) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} > \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}$, таккак $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} > 0 > \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6}$. 8.3. а) $d_1 = d_2 = 2\pi$; б) $\frac{2\pi}{3}$. 8.4. а) II четвер-

ти; б), в) III четверти; г) границе II и III четверти; д) I четверти;

е) III четверти; ж) IV четверти; з) I четверти; и) II четверти. Угол

аргосса α берется из промежутка от 0 до π , поскольку косинус данногоугла отрицателен, то угол — во второй четверти. 8.5. а) $13 - 4\pi$.Обозначим $\alpha = \arcsin(\sin 13)$. Тогда задача сводится к нахождениюугла α такого, что $\sin \alpha = \sin 13$, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Поскольку $4\pi < 13 <$ $< 4,5\pi$, угол α отстоит от 13 ровно на 2 периода, т. е. на 4π ; б) $\pi - 4$;в) $4\pi - 10$; г) $34 - 11\pi$. 8.6. а) $\arcsin 1 > 1$; б) $\arccotg 0 > 1$;в) $\arcsin \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$; г) $\arccos \left[-\frac{1}{2} \right] > 2$; д) $\sin \left[\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{3}{4}$;е) $\arccos(\cos 10) = 4\pi - 10 < \frac{5\pi}{6}$ (см. ответ к задаче 8.5, в));ж) $\arctg(\operatorname{tg} 5) = 5 - 2\pi < -\frac{1}{2}$.**Простейшие тригонометрические уравнения.** 8.7. а) $\frac{5\pi}{24} + (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} +$ $+\frac{\pi n}{2}$; б) $(1 \pm \sqrt{1 + \pi + 4\pi n})/2$, $n \geq 0$; в) $-\frac{1}{3} \pm 5\frac{\pi}{18} + \frac{2}{3}\pi n$. 8.8.а) $-127\pi/48$. Решив уравнение $2x - \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{3} + \pi n$, получаем $x = 17\pi/48 + \pi n/2$. Поскольку должны выполняться неравенства $-3\pi \leq \frac{17\pi}{48} + \frac{\pi n}{2} \leq -\frac{5\pi}{2}$, находим, что $n = -6$; б) $-\frac{143}{48}\pi$;в) $-\frac{131}{45}\pi$. Поскольку косинус — четная функция, $\cos \left[-5x - \frac{4\pi}{9} \right] = \cos \left[5x + \frac{4\pi}{9} \right]$; г) $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \frac{7\pi}{2}$. Из условия $x = -\frac{3\pi}{2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi n$, аналогично п. а) получаем, что $-\frac{3}{4} -$ $-\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \leq n \leq -\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. Поскольку $-2 < -\frac{3}{4} -$

$-\frac{1}{\pi} \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} < -1$, а $-1 < -\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arccotg} \frac{1}{2} < 0$, то $n = -1$; д) $4 - 4\pi$;
 е) 0. Из условия $-3\pi < x < -\frac{5\pi}{2}$ получаем: $-\frac{3\pi}{4} - 1 \leq \frac{x}{4} - 1 \leq$
 $\leq -\frac{5\pi}{8} - 1$. Так как $-\frac{3\pi}{4} - 1 > -\frac{3\pi}{2}$ и $-\frac{5\pi}{8} - 1 < -\frac{\pi}{2}$, а на
 промежутке $(-3\pi/2; -\pi/2)$ косинус отрицателен, то левая часть уравне-
 ния отрицательна, а правая положительна, и решений нет. 8.9. а) $2 +$
 $+\sqrt{3}/2$. Уравнение сводится к такому: $\cos \frac{\pi}{3} = x - 2$; б) $-1 \pm \sqrt{11/2}$;
 в) 0; г) решений нет. Арккотангенс принимает значения от 0 до π и не
 может равняться $-\frac{\pi}{4}$.

Формулы, связывающие разные тригонометрические функции одного и того же угла. 8.10. а) 1; б) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$; в) $\sin \alpha \cos \alpha$; г) $\operatorname{tg}^2 \alpha$;
 д) $\frac{|\cos \alpha|}{1 + \sin \alpha}$ или $\frac{1 - \sin \alpha}{|\cos \alpha|}$; е) $\frac{\sin \alpha |\cos \alpha|}{\cos \alpha}$; ж) $\sin^2 \alpha$. 8.11. $\frac{1}{5}$.

Разделив числитель и знаменатель дроби на $\cos \alpha$, получим:
 $\frac{3 \operatorname{tg} \alpha - 1}{\operatorname{tg} \alpha + 2} = \frac{1}{5}$. 8.12. $\frac{4}{9}$. Найдите сначала $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$. 8.13. 18.

8.14. а) $y_{\min} = -2$, $y_{\max} = 3$. Сделав замену $\sin x = t$, получим
 функцию $y = 5t^2 - 2$, где $-1 \leq t \leq 1$, принимающую максимальное
 значение при $t = 1$ и минимальное при $t = 0$; б) $y_{\min} = -3$, $y_{\max} = \frac{7}{3}$.

Сделайте замену $\sin x = t$. 8.15. а) $y^2 - x = 2$; б) $y = x \left[\frac{3}{2} - \frac{x^2}{2} \right]$.

Из системы $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1-x^2}{2}$; разложив левую часть второго уравне-
 ния как разность кубов, получим ответ. 8.16. а), б) да; в) нет; г), д),
 е) да; ж) нет.

Задачи 8.18 — 8.34 решаются приведением к простейшим уравнениям
 с помощью формул, связывающих различные тригонометрические
 функции одного аргумента, разложением на множители или комбини-
 рованием свойств тригонометрических и других функций. При этом
 необходимо следить за равносильностью переходов, проводить (там, где
 нужно) отбор полученных значений неизвестного или, наоборот, рас-
 сматривать особые случаи, если проведенные преобразования сужают
 область определения. 8.18. $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$. 8.19. $\frac{\pi}{2} + \pi n$. 8.20.

$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. 8.21. $\pm \arccos \frac{\sqrt{41}-3}{8} + 2\pi n$. После замены $\cos x = t$ получа-

ем уравнение $4t^2 + 3t - 2 = 0$; $t = \frac{-3-\sqrt{41}}{8} < -1$. 8.22. $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.

Замена $\cos x = t$; при $t \geq 0$ оба корня полученного квадратного уравне-
 ния $6t^2 - 8t + |t| - 6 = 0$ не подходят, поскольку один из них
 отрицателен, а другой — больше единицы. 8.23. $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\operatorname{arctg} \frac{1}{2} +$
 $+\pi k$. Приведя к общему знаменателю и заменив 1 на $\sin^2 x + \cos^2 x$,

получим однородное уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$ (это значит, что сумма степеней $\sin x$ и $\cos x$ в каждом слагаемом одна и та же; в данном случае она равна 2). Заметив, что $\cos x \neq 0$ (это означало бы, что и $\sin x = 0$, но $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно обращаться в 0, поскольку сумма их квадратов равна 1), разделим уравнение на $\cos^2 x$. Получим: $2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0$; это уравнение легко решается. **8.24.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $\pi + 2\pi k$. Уравнение приводится к виду

$(1 + \sin x \cos x)(\sin x - \cos x - 1) = 0$. Убедившись в том, что $1 + \sin x \cos x \neq 0$ (ибо $\sin x \cos x = -1$ тогда и только тогда, когда одновременно $\sin x = 1$, $\cos x = -1$ либо $\sin x = -1$, $\cos x = 1$, но $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), решим уравнение $\sin x - \cos x - 1 = 0$, или $\sin x = 1 + \cos x$. Ясно, что должно быть $\sin x \geq 0$ и $\cos x \leq 0$, т. е. угол x лежит во II четверти или на ее границе. Но для любого угла, лежащего внутри II четверти, равенство $\sin x + (-\cos x) = 1$ означает, что в прямоугольном треугольнике с гипотенузой 1 и катетами, равными $\sin x$ и $(-\cos x)$, сумма длин катетов равна длине гипотенузы, что невозможно. Следовательно, $\sin x = 0$, $\cos x = -1$ или $\sin x = 1$, $\cos x = 0$. Осталось решить эти системы уравнений. **8.25.** $-\frac{\pi}{4} + \pi n$;

$\arctg \frac{3}{4} + \pi k$. Уравнение приводится к однородному (см. также решение

задачи **8.23**). **8.26.** $\pm \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} + \pi k$. Поскольку $2 \operatorname{ctg}^2 x + 2 = \frac{2}{\sin^2 x}$, после замены $t = 4^{1/\sin^2 x}$ уравнение приводится к виду

$t^2 - 10t + 16 = 0$, откуда $t_1 = 2$, $t_2 = 8$ и $\sin^2 x = 2$ или $\sin^2 x = \frac{2}{3}$.

8.27. $\frac{4}{3}$; πn . Из условия получаем $|x - 2| \sin x = \frac{x}{2} |\sin x|$, откуда

$$\begin{cases} \sin x \geq 0, \\ \sin x \left(|x - 2| - \frac{x}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin x < 0, \\ \sin x \left(|x - 2| + \frac{x}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

Из первой системы следует, что 1) $\sin x = 0$ либо 2) $|x - 2| = \frac{x}{2}$, т. е. $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{4}{3}$, причем x_1 не удовлетворяет неравенству $\sin x \geq 0$ (поскольку $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$), а x_2 ему удовлетворяет. Вторая система равносильна такой:

$$\begin{cases} \sin x < 0, \\ |x - 2| + \frac{x}{2} = 0, \end{cases}$$

но уравнение $|x - 2| + \frac{x}{2} = 0$ решений не имеет. **8.28**

$$(-1)^n \arcsin \frac{1}{8} + \pi n; \quad (-1)^{k+1} \arcsin \frac{7}{8} + \pi k; \quad (-1)^m \arcsin \frac{5}{8} + \pi m.$$

Имеем: $\frac{4\pi}{3} \sin x = \frac{\pi}{6} + 2\pi l$ или $\frac{4\pi}{3} \sin x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi r$, откуда $\sin x = \frac{1}{8} + \frac{3}{2}l$ или $\sin x = \frac{5}{8} + \frac{3}{2}r$. Должно быть $-1 \leq \frac{1}{2} + \frac{3}{2}l \leq 1$, откуда $l = 0$ и $\sin x = \frac{1}{8}$; аналогичные ограничения на r приводят еще

к двум уравнениям: $\sin x = -\frac{7}{8}$ и $\sin x = \frac{5}{8}$. * 8.29. $\pi + 2\pi n$;

$\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. Данное уравнение равносильно системе $\sin^3 x - \cos^3 x = -\cos x$, $\cos x \leq 0$. Уравнение системы приводится к виду $\sin^3 x = \cos x (\cos^2 x - 1)$, или $\sin^2 x (\sin x + \cos x) = 0$, откуда $\sin x = 0$ либо $\operatorname{tg} x = -1$. Из решений уравнения $\sin x = 0$ лишь $x = \pi + 2\pi n$ удовлетворяет неравенству системы, а из решений уравнения $\operatorname{tg} x = -1$ — лишь $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$. 8.30. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$. Из $x = \pi n$;

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ надо отобрать те x , при которых $\sin x \geq \frac{1}{3\sqrt{4}}$.

8.31. $-\frac{5\pi}{3} + 2\pi n$. Перенеся второе слагаемое в правую часть, возведя в квадрат полученное уравнение и сделав замену $t = \sin x$, приходим к квадратному уравнению, один из корней которого больше 1 и не может быть синусом x . Остается решить уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, учитывая

ограничение $\cos x \leq 0$. 8.32. $\pm \arccos \frac{2}{(-1)^n \pi + 4\pi n} + 2\pi k$. Заметьте, что

$$\left| \frac{2}{(-1)^n \pi + 4\pi n} \right| \leq 1 \text{ для всех } n \in \mathbb{Z}. \quad 8.33. \frac{7}{4}. \text{ Первый из сомножителей}$$

положителен (если существует), второй равен нулю при $x_1 = \frac{7}{4}$ и

$x_2 = \frac{1}{2}$. При $x = x_1$ имеем $2x - \operatorname{ctg} x = \frac{7}{2} - \operatorname{ctg} \frac{7}{4}$, и поскольку

$\operatorname{ctg} \frac{7}{4} < 0$, то $2x - \operatorname{ctg} x > 0$. При $x = x_2$ имеем $2x - \operatorname{ctg} x = 1 -$

$-\operatorname{ctg} \frac{1}{2}$, но $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} > \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$ и $2x - \operatorname{ctg} x < 0$, т. е. первый сомно-

житель в левой части исходного уравнения не определен. 8.34. $-1; 0$;

* В случаях, когда надо проводить какое-либо исследование решений (например, отбор), вместо формул $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ и $x = \pm \arccos a + 2\pi k$ удобнее использовать соответственно формулы

$$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi m \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = \arccos a + 2\pi k, \\ x = -\arccos a + 2\pi l \end{cases}$$

π ; 4. Из решений уравнения $\sin x = 0$ отбираем лишь удовлетворяющие условию $4 + 3x - x^2 \geq 0$. **8.35.** $\pi + \arcsin \frac{\pi}{6}$; $\pi - \arcsin \frac{\pi}{12}$. **8.36.** 0 ; $\frac{\pi}{6}$; π . Приведем уравнение к виду $\sqrt{\operatorname{tg} x} (\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x} - \sqrt{3}) = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 0$ или $\sqrt{1 + \cos x} + \sqrt{1 - \cos x} = \sqrt{3}$. Решая второе из полученных уравнений, приходим к уравнению $|\sin x| = \frac{1}{2}$; из его решений отбираем те значения x , при которых $\operatorname{tg} x \geq 0$. **8.37.** 2. Поскольку $1 + \cos^2(\pi x) \leq 2$, то $\log_2(1 + \cos^2(\pi x)) \leq 1$. Кроме того, $4x - x^2 - 3 = 1 - (x - 2)^2 \leq 1$, поэтому данное неравенство выполняется лишь при $4x - x^2 - 3 = 1$ и $\log_2(\cos^2(\pi x) + 1) = 1$, т. е. при $x = 2$, $\cos^2(\pi x) = 1$.

Теоремы сложения. **8.38.** а) $\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})/4$. Заметьте, что $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$; б) $-(2 + \sqrt{3})$; в) $\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})/4$. **8.39.** а) Так как $0 < \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$; аналогично $0 < \beta < \frac{\pi}{6}$;

поэтому $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{3}$. Но $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1$ (убедитесь в этом!), а на промежутке $(0; \frac{\pi}{3})$ только угол $\frac{\pi}{4}$ имеет тангенс, равный 1. **8.40.** 0,25.

В самом деле, $\frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = \frac{1}{2}((\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) - (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)) = \sin \alpha \sin \beta$, т. е. $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(0,8 - 0,3) = 0,25$. **8.41.** а) $-\frac{16}{25}$. Пусть $\arcsin \frac{12}{13} = \alpha$,

$\operatorname{arctg} \frac{3}{4} = \beta$. Таким образом, нужно найти $\cos(\alpha + \beta)$, если

$\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{3}{4}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Но $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$. Учитывая, что на самом деле α и β — углы I четверти, где все тригонометрические функции положительны, находим $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{5}{13}$, $\cos \beta = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{4}{5}$,

$\sin \beta = \cos \beta \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{3}{5}$, после чего находим ответ; б) $\frac{33}{65}$. **8.42.**

а) $\operatorname{arctg} \frac{16}{63}$. Пусть $\operatorname{arctg} 2,4 = \alpha$, $\arccos \frac{3}{5} = \beta$. Таким образом, нужно упростить выражение $(\alpha - \beta)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$, $\cos \beta = \frac{3}{5}$,

$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \beta \leq \pi$. Вычислим $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$. Для

этого найдем $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \beta} - 1} = \frac{4}{3}$ (поскольку при $0 \leq \beta \leq \pi$ имеем $\cos \beta > 0$, то β — в I четверти и $\operatorname{tg} \beta > 0$). Итак, $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{16}{63}$ (проверьте). Так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то

$-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$, и $\alpha - \beta = \arctg \frac{16}{63}$; б) $-\arctg \frac{36}{77}$. **8.43.** а) $\frac{1}{3}$.

Заметьте, что $\frac{\pi}{8} + \alpha = \left[\frac{3\pi}{8} + \alpha \right] - \frac{\pi}{4}$; б) $(24\sqrt{3} - 7)/50$. **8.44.**

а) $\tg \alpha$; б) 1; в) $\cos \alpha \cos \beta$; г) $\tg \frac{\pi}{7}$; д) 1. **8.46.** а) $\frac{a+b}{1-ab} = 1$. Заметь-

те, что $45^\circ = (22,5^\circ + \alpha) + (22,5^\circ - \alpha)$; б) $\sqrt{3} = \frac{a-b}{1+ab}$. **8.47.** а)

$-\frac{\pi}{4} + \pi n$. Применив теоремы сложения, получим уравнение

$\cos x + \sin x = 0$, однородное относительно $\sin x$ и $\cos x$ (см. решение задачи **8.23**); б) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$. Перенеся левую часть в правую, получим

$\cos 3x = 0$; в) $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi k}{3}$. Заметьте, что $\cos 5x = \cos (2x + 3x)$;

г) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$; $\frac{\pi}{2} + \pi k$. Уравнение приводится к виду $\frac{t+1}{1-t} + \frac{t-1}{1+t} = \frac{2}{t}$,

где $t = \tg x$. Отсюда получаем первую серию корней. Кроме того,

формулы $\tg (\alpha \pm \beta) = \frac{\tg \alpha \pm \tg \beta}{1 \mp \tg \alpha \tg \beta}$ сужают область определения (их

можно применять при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$), поэтому возможна

потеря корней. Проверка показывает, что $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ действительно

удовлетворяют уравнению; д) $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{3} + 2\pi k$. После возведения в

квадрат получаем $\sin 3x = 0$, откуда $x = \frac{\pi n}{3}$. Из этих решений нужно

выбрать те, при которых $\sin x \cos 2x \geq \frac{1}{3}$. При $x = 0$ и $x = \pi$ это

неравенство не выполняется, ибо $\sin x = 0$. При $x = \frac{\pi}{3}$ имеем

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, $\cos 2x = -\frac{1}{2} < 0$, и неравенство не выполняется.

Разобрав аналогично случаи $x = \frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$, находим, что лишь

решения $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ нам подходят, откуда и получаем ответ; е) $2\pi n$,

$\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$. Приведя уравнение к виду $\cos x - |\cos x| = 2 \sin x$,

получим две системы: $\cos x \geq 0$, $\sin x = 0$ и $\cos x < 0$, $\tg x = 1$,

решить которые нетрудно; ж) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$. Решение аналогично

п. в).

Формулы приведения. 8.49. а) $\cos^2 17^\circ$; б) $\sin^2 \left[\alpha - \frac{\pi}{5} \right]$; в) 0; г) -1 .

* Найденные серии решений частично совпадают (в обе входят $x = \pi n$), но мы это опускаем.

8.51. а) $x \in \mathbb{R}$; б) $2\pi k$; в) $\frac{\pi}{3} + \pi n$; г) $x \neq 110^\circ + 180^\circ k$. Заметьте, что $\operatorname{tg}(x - 200^\circ) = \operatorname{tg}(x - 20^\circ - 180^\circ) = \operatorname{tg}(x - 20^\circ)$.

Формулы удвоения и деления пополам. 8.52. а) $-\frac{3}{5}$. Задача сводится

к нахождению $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; поэтому $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = -\frac{3}{5}$; б) $\frac{120}{119}$. Аналогично п. а), так как $\sin \alpha = \frac{5}{13}$,

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{5}{12}$ и $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{120}{119}$; в)

$\frac{\sqrt{10}}{10}$. Так как $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{4}{5}$ и

$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{(1 - \cos \alpha)/2} = \sqrt{10}/10$; г) $3/\sqrt{13}$. 8.53. а) $\frac{4}{225}$, так как

$$\frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \sin 4\alpha}{\operatorname{tg} 4\alpha + \sin 4\alpha} = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha(1 - \cos 4\alpha)}{\operatorname{tg} 4\alpha(1 + \cos 4\alpha)} = \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = \operatorname{tg}^2 2\alpha; \text{ б) } 194.$$

8.55. а) $\frac{1}{4}$, так как $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \left[2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} \right] \cos \frac{2\pi}{5} / \left[2 \sin \frac{\pi}{5} \right] =$
 $= \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} / \left[2 \sin \frac{\pi}{5} \right] = \sin \frac{4\pi}{5} / \left[4 \sin \frac{\pi}{5} \right] = \sin \left[\pi - \frac{\pi}{5} \right] / \left[4 \sin \frac{\pi}{5} \right];$ б) $-\sin 2\alpha$; в) $\left| \sin \frac{\alpha}{8} \right|$; г) $\left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right|$; д) 0; е) $\frac{1}{4}$.

8.56. а) $x^2 - y = 1$; б) $1 - y = 2x^2$. 8.57. а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$; б) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$.

Выразите $\sin^2 x$ и $\sin^2 2x$ через $\cos 2x$; в) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$ (см. указание к п. 6)); г) $2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Выразите левую и правую часть через синус

и косинус половинного угла; д) $2 \operatorname{arctg} \frac{4 \pm \sqrt{7}}{9} + 2\pi n$. Выразите $\sin x$ и $\cos x$ через тангенс половинного угла. Не забудьте проверить отдельно, не являются ли решениями значения $x = \pi + 2\pi m$, при которых $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$

не существует; е) $2 \operatorname{arctg} \frac{4 \pm \sqrt{21}}{5} + 2\pi n$ (см. указание к п. д));

ж) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; з) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$. Перейдите к уравнению относительно $\cos 2x$; и) $\frac{\pi n}{4}$. Учтите, что $\sin^4 2t + \cos^4 2t = 1 -$

$- 2 \sin^2 2t \cos^2 2t$; к) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; πk ; л) $\frac{\pi n}{2}$; м) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$. Выра-

жите $(\sin x - \cos x)^2$ и $\cos^2 2x$ через $\sin 2x$; н) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$;

о) πn ; $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k$. Учтите, что $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$, а $\frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} =$

$= \left[\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right]^2$. 8.58. $\frac{25\pi}{6}$. Выразив $\sin^2 x$ и $\sin^2 2x$ через $\cos 2x$ и

сделав замену $\cos 2x = t$, получим $2t^2 + t - 1 = 0$, откуда $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Из корней уравнения $\cos 2x = -1$ условию удовлетворяют лишь $x = \frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{3\pi}{2}$, а из корней уравнения $\cos 2x = \frac{1}{2}$ — только $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.

Преобразование суммы функций в произведение. 8.59. а) $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$. Выразите $\cos^2 \alpha$ и $\sin^2 \beta$ через косинусы соответствующих двойных углов; б) $2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right] = 2\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \times \sin \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right]$. Выразите $1 - \cos \alpha$ и $\sin \alpha$ через $\sin \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \frac{\alpha}{2}$, а затем $\cos \frac{\alpha}{2}$ замените на $\sin \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right]$; в) $4 \sin \alpha \sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$; г) $4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\alpha+\varphi}{2}$; д) $-4 \cos 24^\circ \sin^2 6^\circ$; е) $-\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha \times \operatorname{tg} 3\alpha$. В самом деле, $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha) - \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha} -$

$$-\frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha} (\cos 3\alpha - \cos \alpha \cos 2\alpha) = \frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha} (\cos 3\alpha - \cos \alpha \cos 2\alpha); \text{ ж) } \operatorname{tg} 25^\circ; \text{ з) } 2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$\text{и) } 4 \sin \left[\frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2} \right] \sin \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right]; \text{ к) } 4 \sin \left[\frac{\pi}{6} + \alpha \right] \sin \left[\alpha + \frac{\pi}{6} \right].$$

В самом деле, $3 - 4 \cos^2 \alpha = 3 - 2(1 + \cos 2\alpha) = 1 - 2 \cos 2\alpha = 2 \left[\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha \right];$ л) $\sqrt{2} \cos x \sin \left[\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right] / \cos \frac{x}{2};$ м) $4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \sin \frac{5\alpha}{2};$ н) 0; о) $\frac{1}{2}$.

8.61. а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k;$ б) $(-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4};$ в) $\frac{\pi n}{3}; \pm \frac{\pi}{3} + \pi k;$ г) $\frac{\pi n}{2}; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k;$ д) $2\pi n;$ $\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{2} + 2\pi m.$ Заменяв в правой части $2 \sin^2 y$ на $1 - \cos 2y$, приведем уравнение к виду $\cos 3y - \cos 2y = \sin 2y - \sin y$, откуда $\sin \frac{y}{2} \left[\cos \frac{3y}{2} + \sin \frac{5y}{2} \right] = 0.$ Далее целесообразно учесть, что $\sin \frac{5y}{2} = \cos \left[\frac{\pi}{2} - \frac{5y}{2} \right];$ е) $\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{10} + \frac{\pi m}{5};$ ж) $\frac{\pi}{2} + \pi n;$ $-\frac{\pi}{4} + \pi m;$ з) $\pi n; \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}.$ Уравнение приводится к виду

$\sin x (1 - 2 \cos 3x) = 0.$ Все корни первого сомножителя подходят. Не забудьте также убедиться, что среди корней второго сомножителя посторонних нет; и) $-2 + \pi n; -\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} + \pi k.$ 8.62. 6. 8.63. $\frac{\pi}{4} + 4\pi n;$

$\frac{3\pi}{8} + 4\pi k; \frac{7\pi}{8} + 4\pi m; \frac{5\pi}{4} + 4\pi p; \frac{11\pi}{8} + 4\pi l; \frac{31\pi}{8} + 4\pi r.$ Так как $\sin x = \cos \left[\frac{\pi}{2} - x \right],$ получаем $2 \cos \left[\frac{\pi}{4} + x \right] \cos \left[2x - \frac{\pi}{4} \right] = 0,$ откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ или $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},$ поэтому $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ или

$\frac{x}{2} = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$. Поскольку $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} + \cos \left[\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right] = \sqrt{2} \cos \left[\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right]$, из найденных корней надо отобрать те, при которых $\cos \left[\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right] > 0$. Первая серия найденных корней дает $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, вторая $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$. Таким образом, осталось выяснить, при каких n и k верны неравенства $\cos \left[-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \right] > 0$ и $\cos \left[-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4} \right] > 0$. **8.64.** а) πn ; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; б) πn ; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi m$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$. Из полученных после возведения в квадрат значений x надо отобрать те, при которых $\sin x \geq 0$.

Преобразование произведения функций в сумму. 8.65. а) 2. В самом деле, $\frac{1 - 4 \sin 70^\circ \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{\sin 10^\circ} = \frac{2 \cos 80^\circ}{\sin 10^\circ} =$

$= \frac{2 \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ}$; б) $\frac{3}{256}$. Так как $\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$, $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$, ...
..., имеем: $(\sin 10^\circ \cos 10^\circ)(\sin 20^\circ \cos 20^\circ)(\sin 30^\circ \cos 30^\circ)(\sin 40^\circ \times$
 $\times \cos 40^\circ) = \frac{1}{2^4} \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{2^4} (\sin 20^\circ \sin 80^\circ) \times$
 $\times (\sin 40^\circ \sin 60^\circ) = \frac{1}{2^6} (\cos 60^\circ - \cos 100^\circ)(\cos 20^\circ - \cos 100^\circ) =$
 $= \frac{1}{2^6} \left[\frac{1}{2} + \sin 10^\circ \right] (\cos 20^\circ + \sin 10^\circ) = \frac{1}{2^6} \left[\frac{1}{2} \cos 20^\circ + \sin 10^\circ \times \right.$
 $\times \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \sin 10^\circ + \sin^2 10^\circ \left. \right] = \frac{1}{2^7} (\cos 20^\circ - \sin 10^\circ +$
 $+ \sin 30^\circ + \sin 10^\circ + 1 - \cos 20^\circ) = \frac{3}{2^8}$; в) $\frac{3}{4}$. **8.66.** в) Умножив и

разделив левую часть на $2 \sin \frac{\alpha}{2}$, представьте каждое из произведений вида $2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin k\alpha$ в виде разности косинусов. Все слагаемые в левой части, кроме первого и последнего, взаимно уничтожатся. **8.67.** а) $-\frac{1}{2}$.

Умножьте и разделите на $2 \sin \frac{\pi}{9}$ (см. указание к задаче **8.66**); б) $\frac{11}{4}$. Сначала перейдите к косинусам двойных углов, затем действуйте так

же, как в п. а); в) $\frac{27}{16}$. Заметьте, что $\sin^4 \frac{\pi}{9} = \left[\frac{1 - \cos \frac{2\pi}{9}}{2} \right]^2 =$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{9} + \frac{1}{4} \cos^2 \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{9} + \frac{1}{4} \left[\frac{1 + \cos \frac{4\pi}{9}}{2} \right]$. **8.68.** а)

$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$; б) $\frac{\pi}{8} + \frac{2\pi n}{9}$. Представьте первое слагаемое в виде $\cos^2 x (\cos x \sin 3x)$ и замените произведение в скобках на сумму; затем, внося в скобки еще один косинус, снова замените все произведения

такого вида на суммы, и так далее; аналогично поступите со вторым слагаемым; в) $\frac{\pi n}{8}$; г) $2\pi n$; д) $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{9}$; $\pi + 2\pi k$; так как первая серия решений включает в себя вторую, достаточно записать в ответ лишь первую серию решений.

Линейное уравнение относительно синуса и косинуса. Уравнение вида $a \sin f(x) + b \cos f(x) = c$ удобно решать следующими двумя способами. 1) Введение вспомогательного угла. Так как $a^2 + b^2 > 0$, разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$. Поскольку

$$\left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]^2 + \left[\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]^2 = 1, \text{ точка } \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]$$

лежит на единичной окружности, и ее координаты есть синус и косинус некоторого (вспомогательного) угла φ . Тогда уравнение рассматриваемого вида приводится к такому:

$$\sin(f(x) + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ или}$$

$$\cos(f(x) - \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

в зависимости от того, положили мы $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ или

$\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; находим из него неизвестное. 2). Рациональная

подстановка. Выразив синус и косинус через тангенс половинного угла, приводим уравнение к квадратному относительно $\operatorname{tg} \frac{f(x)}{2}$. Решив его, отдельно проверяем, являются ли решениями исходного уравнения те значения x , при которых не существует $\operatorname{tg} \frac{f(x)}{2}$, т. е. решения уравне-

ния $f(x) = \pi + 2\pi n$. **8.69.** а) -2 ; 2. Введя вспомогательный угол, получим $y = 2 \sin \left[x - \frac{\pi}{3} \right]$; 6) $-\sqrt{13} - 8$; $\sqrt{13} - 8$. Функция приво-

дится к виду $y = \sqrt{13} \left[\frac{2}{\sqrt{13}} \sin x + \frac{3}{\sqrt{13}} \cos x \right] - 8$; в) -3 ; $\frac{3}{2}$. Наименьшее значение достигается, если $\cos x = -1$, $\cos y = -1$ и

$\cos(x + y) = 1$, например, при $x = y = \pi$. Для нахождения наибольшего значения можно поступить двояко. 1) $f(x, y) = \cos x + \cos y - \cos x \cos y + \sin x \sin y = (\sin y) \sin x + (1 - \cos y) \cos x + \cos y$.

Введем вспомогательный угол φ такой, что $\sin \varphi = \frac{1 - \cos y}{\sqrt{2(1 - \cos y)}}$ и

$$\cos \varphi = \frac{\sin y}{\sqrt{2(1 - \cos y)}}; \text{ тогда } f(x, y) = \sqrt{2(1 - \cos y)} \sin(x + \varphi) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos y \leq \sqrt{2(1 - \cos y)} + \cos y = 2 \left| \sin \frac{y}{2} \right| + 1 - 2 \sin^2 \frac{y}{2} = \\
 & = -2 \left[\left| \sin \frac{y}{2} \right| - \frac{1}{2} \right]^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}. \text{ Наибольшее значение достигается,} \\
 & \text{если одновременно } \sin(x + \varphi) = 1 \text{ и } \left| \sin \frac{y}{2} \right| = \frac{1}{2}, \text{ например, при } x = \\
 & = y = \frac{\pi}{3}. \quad 2) \quad f(x; y) = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \left[2 \cos^2 \frac{x+y}{2} - 1 \right] = \\
 & = 1 - 2 \left[\cos \frac{x+y}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right]^2 + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{x-y}{2} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\
 & \text{причем равенство достигается, если одновременно } \cos \frac{x+y}{2} = \\
 & = \frac{1}{2} \cos \frac{x-y}{2} \text{ и } \cos^2 \frac{x-y}{2} = 1. \quad \mathbf{8.70.} \text{ а) } \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Преобразуем уравнение,}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{задающее функцию: } \sqrt{3}(y \sin x - \cos x) = 2. \text{ Введем вспомогательный} \\
 & \text{угол } \varphi \text{ такой, что } \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}}, \quad \cos \varphi = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}}. \text{ Уравнение} \\
 & \text{примет вид } \sin(x - \varphi) = \frac{2}{\sqrt{3(y^2 + 1)}}. \text{ Оно имеет решение тогда и} \\
 & \text{только тогда, когда } \frac{2}{\sqrt{3(y^2 + 1)}} \leq 1, \text{ т. е. при } y^2 \geq \frac{1}{3}. \text{ Поскольку}
 \end{aligned}$$

$$2 + \sqrt{3} \cos x > 0 \text{ при всех } x, \text{ а } \sin x > 0 \text{ при } 0 < x < \pi, \text{ функция} \\
 \text{положительна; поэтому } y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ причем минимум достигается, когда}$$

$$\sin(x - \varphi) = 1, \text{ например, если } x - \varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ откуда } x = \varphi + \frac{\pi}{2},$$

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \cos \varphi = \frac{1}{2}, \text{ т. е. } \varphi = \frac{\pi}{6}. \text{ Но } \frac{5\pi}{6} \text{ лежит в заданном} \\
 \text{интервале. Ответ можно было бы найти и с помощью производной;}$$

$$\text{б) } a\sqrt{3}. \quad \mathbf{8.71.} \quad \text{а) } |\sin x + \cos x| = \sqrt{2} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right| =$$

$$= \sqrt{2} \cos \left| x - \frac{\pi}{4} \right| \leq 2^{0.5}, \text{ причем равенство достигается, если}$$

$$\left| \cos \left[x - \frac{\pi}{4} \right] \right| = 1, \text{ т. е. } x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n. \text{ С другой стороны,}$$

$$2^{0.5} \geq 2^{0.5}, \text{ причем равенство достигается, если } |\sin x| = 0, \text{ т. е.} \\
 \text{при } x = \pi k. \text{ Итак, равенства левой и правой частей быть не может,}$$

$$\text{следовательно, неравенство строгое; б) } 2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2\sqrt{2^{\sin x} 2^{\cos x}},$$

так как $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ для любых положительных a и b . **8.72***

а) $\frac{\pi}{6} + \pi n$; б) $\frac{1}{2} \left[-\arccos \frac{4}{\sqrt{65}} \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{65}} \right] + \pi n$; в) $\frac{1}{2} \arccos \frac{3}{5} + \frac{\pi}{4} + \pi n$; г) πn ; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; д) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $(-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$;

е) $\frac{1}{2} \arcsin \frac{4}{5} + \frac{1}{2} (-1)^n \arcsin \frac{3}{5} + \frac{\pi n}{2}$; ж) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; з) $2\pi n$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$. Не забудьте, что корни должны удовлетворять условию $\cos x \geq 0$; и) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. Не забудьте, что корни должны

удовлетворять условию $\sin x \geq 0$; к) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\pi + 2\pi k$. **8.73.** а) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$. Выразив $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ через $\cos 2x$, приходим к уравнению

$\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 2$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$. Осталось отобрать среди этих x нужные; б) $\frac{1}{4}$; $-\frac{7}{4}$. Введем вспомогательный угол φ такой, что

$\cos \varphi = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x}}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x}}$, $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x}}$. Уравнение примет

вид $\cos(\pi x - \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \operatorname{ctg}^2 2\pi x}}$. Правая часть полученного урав-

нения не меньше 1 (убедитесь в этом!), поэтому уравнение имеет решения лишь при $\operatorname{ctg}^2 2\pi x = 0$, т. е. $x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}$. Тогда $\cos \varphi =$

$= \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и наше уравнение примет окончательный

вид $\cos \left[\pi x - \frac{\pi}{4} \right] = 1$, откуда $x = \frac{1}{4} + 2n$. Осталось выбрать среди найденных значений x нужные; в) $-\frac{4}{3}$; $\frac{2}{3}$; г) два корня. Уравнение

приводится к виду $(\sin x - 1) \left[\sqrt{3 - 2\cos x} \right] = 0$.

Формулы тройных углов. **8.74.** а) πn ; $\pm \arccos \frac{1 - \sqrt{2}}{2} + 2\pi k$. Приме-

ните формулу синуса тройного угла; б) πn ; $\pm \arccos \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 2\pi k$;

* Ответы получены способом введения вспомогательного угла. Советуем также решить эти задачи с помощью рациональной подстановки.

в) $\frac{\pi}{3} + \pi n$; $\frac{\pi}{3} \pm \arcsin \frac{\sqrt{33}}{6} + \pi k$. После замены $x - \frac{\pi}{3} = t$ уравнение приводится к виду $2\sin t + 3\sin 3t = 0$; г) $\frac{\pi n}{2}$; $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$; д) πn ;

$\pm \arctg \sqrt{\frac{5}{7}} + \pi k$. Числитель можно преобразовать так: $(\sin x + \sin 5x) + \sin 3x = \sin 3x(2\cos 2x + 1)$. Аналогично преобразовав знаменатель, примените формулу тангенса тройного угла. Не забудьте проверить, не обращается ли в нуль знаменатель исходного уравнения при найденных значениях x ; е) $\pm \arccos \left[\operatorname{tg} \frac{\pi}{18} \right] + 2\pi k$. После замены

$y = \cos x$ уравнение принимает вид $\sqrt{3}(3y - y^3) = 1 - 3y^2$, или, так как $1 - 3y^2 \neq 0$ (проверьте!), $\frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Сделав в полученном

уравнении замену $y = \operatorname{tg} \varphi$, получим $\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $\varphi = \frac{\pi}{18} +$

$+\frac{\pi n}{3}$. Итак, $\cos x = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3} \right]$. При $n = 0$ имеем уравнение

$\cos x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{18}$, откуда $x = \pm \arctg \frac{\pi}{18} + 2\pi k$. При $n = 1$ имеем

$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{18} > \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, и решений нет. При $n = 2$ получим $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{18} =$

$= -\operatorname{tg} \frac{5\pi}{18} < -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$, и решений нет. При остальных целых n

значения $\operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3} \right]$ повторяются. 8.75. $a = 2$, $a = 3$, $a > 4$. Из

первого уравнения получаем $\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$. Второе уравне-

ние после применения формулы синуса тройного угла принимает вид

$\sin x(4\sin^2 x - 2|a - 1|\sin x + a - 2) = 0$. Подставив в него

$\sin x = \frac{1}{2}$, получим $|a - 1| = a - 1$, т. е. $a - 1 \geq 0$. Решим при

$a \geq 1$ второе уравнение; оно принимает вид $\sin x \left[\sin x - \frac{1}{2} \right] \times$

$\times \left[\sin x - \frac{a-2}{2} \right] = 0$, т. е. $\sin x = 0$, или $\sin x = \frac{1}{2}$, или $\sin x =$

$= \frac{a-2}{2}$. Исходные уравнения будут равносильны, если уравнение $\sin x =$

$= \frac{a-2}{2}$ имеет те же решения, что и $\sin x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$ или не имеет

решений, т. е. при $\frac{a-2}{2} = 0$, $\frac{a-2}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{a-2}{2} > 1$, $\frac{a-2}{2} < -1$. 8.76. $\frac{2\pi}{9}$,

$\frac{2\pi}{9}$, $\frac{5\pi}{9}$ или $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{4\pi}{9}$, $\frac{\pi}{9}$. Пусть φ — угол при основании равнобедренного

треугольника. Тогда $m = 2n \cos \varphi$, и данное в условии соотношение

принимает вид $8\cos^3 \varphi - 6\cos \varphi + 1 = 0$, или $2(4\cos^3 \varphi - 3\cos \varphi) =$

$= -1$, откуда $\cos 3\varphi = -\frac{1}{2}$. Поскольку φ — острый угол треугольника, имеем $3\varphi = \frac{2\pi}{3}$ или $3\varphi = \frac{4\pi}{3}$.

Оценки значений тригонометрических функций. Неравенства. 8.77.

4. Так как $\sin x \in [0; 1]$ при $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, проведем замену $t = \sin x$ и исследуем функцию $\varphi(t) = 4t^3$ при $0 \leq t \leq 1$. 8.78. $y_{\max} = 3$,

$y_{\min} = -\frac{3}{2}$. После замены $t = \cos x$ задача сводится к исследованию

функции $\varphi(t) = 2t^2 + 2t - 1$ на отрезке $[-1; 1]$. 8.79. $\frac{27}{16}$. Приравняв

производную функции нулю, найдем единственную на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

критическую точку $x = \frac{\pi}{6}$. Так как $y(0) = 1$, $y\left[\frac{\pi}{6}\right] = \frac{3\sqrt{3}}{4}$,

$y\left[\frac{\pi}{2}\right] = 0$, то $y_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $y_{\min} = 0$. 8.80. а) $2\pi + 8\pi n$. Уравнение

приводится к виду $-2\cos^2 \frac{x}{4} \sin^2 x = 2\left[\sin \frac{x}{4} - \cos x\right]^2$. Его левая

часть неположительна, а правая неотрицательна, поэтому равенство возможно, лишь когда обе они одновременно равны нулю; б) нет решений. Преобразовав произведение в левой части уравнения в сумму,

получим $\sin 2x + \sin 4x - \sin 6x = \frac{16}{5}$, но левая часть не превышает

трех, а правая больше трех; в) $\pi + 2\pi k$. Левая часть уравнения не превышает двух, причем равенство возможно, если одновременно

$\cos 10x = 1$ и $\cos 7x = -1$, откуда $x = \frac{\pi n}{5}$ и $x = \frac{\pi + 2\pi l}{7}$, т. е.

$\frac{\pi n}{5} = \frac{\pi + 2\pi l}{7}$, или $7n = 5 + 10l$. Таким образом, n делится на 5, т. е.

$n = 5m$; тогда $7m = 1 + 2l$, т. е. m нечетно, $m = 2k + 1$. Тогда

$l = 7k + 3$, и $x = \frac{\pi + 2\pi(7k + 3)}{7} = \pi + 2\pi k$; г) 4. Уравнение при-

водится к виду $\cos\left[\pi\left(\sqrt{x-4} - \sqrt{x}\right)\right] + \cos\left[\pi\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x}\right)\right] = 2$, т. е. оба слагаемых одновременно должны быть равны 1,

откуда $\pi\left(\sqrt{x-4} - \sqrt{x}\right) = 2\pi n$ и $\pi\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x}\right) = 2\pi k$. По-

скольку $x \geq 4$ и $\sqrt{x-4} < \sqrt{x}$, имеем $n \leq -1$ и $k \geq 1$, n, k — целые. Кроме того, $x - 4 = (k + n)^2$ и $x = (k - n)^2$, откуда $kn = -1$,

т. е. $k = 1$, $n = -1$; д) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. Ясно, что второе слагаемое в левой

части должно быть равно нулю, иначе $\cos^2\left[\frac{\pi}{4}\left\{\sin x + \right.\right.$

$+ \sqrt{2 \cos^2 x} \Big] \Big] > 1$, чего быть не может. Тогда первое слагаемое равно 1. Итак, получилась система из двух уравнений: $\cos^2 \left[\frac{\pi}{4} \left[\sin x + \sqrt{2 \cos^2 x} \right] \right] = 1$ и $\operatorname{tg}^2 \left[x + \frac{\pi}{4} \operatorname{tg}^2 x \right] = 0$. Первое из них приводится к виду $\sqrt{2} \sin^2 x - \sin x + 4n - \sqrt{2} = 0$ (где $n \in \mathbb{Z}$), его дискриминант неотрицателен при $n \leq 0$; при $n = 0$ имеем $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е. $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$ (при всех $n < 0$

корни квадратного уравнения по модулю больше 1). В обоих этих случаях $\operatorname{tg}^2 x = 1$, и второе уравнение системы принимает вид $\operatorname{tg}^2 \left[x + \frac{\pi}{4} \right] = 0$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi l$; е) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$. Поскольку для любого положительного a верно, что $a + \frac{1}{a} \geq 2$, левая часть уравнения не меньше 12; ж) ± 1 . Уравнение приводится к виду $(x + 1) \left[x - \frac{3}{2} + \sin \frac{\pi x}{6} \right] = 0$, откуда $x = -1$ или $\frac{3}{2} - x = \sin \frac{\pi x}{6}$. Так как $\left| \frac{3}{2} - x \right| \leq 1$ при $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$, второе уравнение может иметь решения лишь на промежутке $\left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2} \right]$, но в этом промежутке $\frac{\pi}{12} \leq \frac{\pi x}{6} \leq \frac{5\pi}{12}$, поэтому функция $\sin \frac{\pi x}{6}$ возрастает на $\left[\frac{1}{2}; \frac{5}{2} \right]$, а функция $\frac{3}{2} - x$ убывает. Следовательно, второе уравнение имеет единственное решение, причем $x = 1$ является его решением, что легко проверить подстановкой; з) ± 1 . Перепишем уравнение в виде $4x \operatorname{arctg} x = \pi$. Пусть $x \geq 0$. В левой части уравнения стоит возрастающая функция, а в правой — постоянная, поэтому при $x \geq 0$ уравнение может иметь лишь единственный корень. Очевидно, что $x = 1$ — его корень. Но функция $4x \operatorname{arctg} x$ четна и, следовательно, уравнение имеет при $x < 0$ второй корень, равный (-1) ; и) 1. Поскольку $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 1$, левая часть имеет смысл лишь при $x = 1$. Проверка показывает, что это — корень уравнения; к) -2 . Так как $x^2 + 4x + 7 = (x + 2)^2 + 3 \geq 3$, то $0 < \operatorname{tg} \frac{\pi}{x^2 + 4x + 7} \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. С другой стороны,

$\left| \frac{\sqrt{3}}{\sin \left[\pi + \frac{\pi x}{4} \right]} \right| \geq \sqrt{3}$; л) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; м) 0. Пусть $\operatorname{arccotg} x = \alpha$, тогда $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, или $(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, т. е. $1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. Левая часть полученного

уравнения не больше, а правая — не меньше единицы, поэтому $\sin 2\alpha = 0$ и $\sin^2 \alpha = 1$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Но равенство

$\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ может выполняться лишь при $k = 0$. Тогда $x = 0$;

н) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$. Уравнение приводится к виду $2^{\cos^4 2x} = \sin \left[3x - \frac{\pi}{4} \right]$. Поскольку $\cos^4 2x \geq 0$, левая часть полученного уравнения не меньше 1, правая же — не больше 1; о) $\frac{9\pi}{2} + 6\pi n$; п) πn ; $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$.

Уравнение приводится к виду $\left[\sin x - \frac{1}{2} \sin^2 3x \right]^2 + \frac{1}{4} \sin^2 3x - \frac{1}{4} \sin^4 3x = 0$, откуда $\left[\sin x - \frac{1}{2} \sin^2 3x \right]^2 + \frac{1}{16} \sin^2 6x = 0$. Сумма двух неотрицательных чисел равна 0 лишь если оба они одновременно равны нулю, поэтому $\sin x - \frac{1}{2} \sin^2 3x = 0$ и $\sin 6x = 0$. **8.81. а)**

$\left[\frac{1}{2} + 2n; -1 \right]$. Так как $y^2 + 2y + 3 = (y + 1)^2 + 2 \geq 2$, равенство возможно лишь если одновременно $\sin \pi x = 1$, $\sin 5\pi x = 1$ и $y = -1$;

б) $\left[\frac{4}{2n+1}; 2 \right]$. Уравнение приводится к виду $\frac{4}{\sin^2 \frac{2\pi}{x}} = 4y - y^2$; здесь

левая часть не меньше, а правая — не больше 4, откуда $\sin^2 \frac{2\pi}{x} = 1$,

$y = 2$; в) $\left[(-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + (2n - k)\pi \right]$,

$\left[(-1)^{m+1} \frac{\pi}{6} + 2\pi m; -\frac{\pi}{2} + (-1)^m \frac{\pi}{6} + (2l - m)\pi \right]$. В решении

задачи **8.69**, в) было показано, что левая часть уравнения не больше $\frac{3}{2}$;

г) $\left[\frac{1}{2}; \pi + 4\pi n \right]$, $\left[-\frac{1}{2}; -\pi + 4\pi k \right]$. Задачу можно решить двумя

способами. 1) Решая уравнение как квадратное относительно x , найдем, что его дискриминант не больше нуля, поэтому $\cos xy = 0$ и

$x = \frac{1}{2} \sin xy$. 2) Выделим полный квадрат: $(2x - \sin xy)^2 + 1 -$

$-\sin^2 xy = 0$, откуда $(2x - \sin xy)^2 + \cos^2 xy = 0$, поэтому $2x =$

$= \sin xy$ и $\cos xy = 0$; д) $\left[\frac{\pi}{4} (2k + 1); \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right]$. Оценим левую

часть: $\sin^4 x + 2 + \frac{1}{\sin^4 x} + \cos^4 x + 2 + \frac{1}{\cos^4 x} = (\sin^4 x +$

$+\cos^4 x) \left[1 + \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x} \right] + 4 = ((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 -$

$-2\sin^2 x \cos^2 x) \left[1 + \frac{16}{\sin^4 2x} \right] + 4 = \left[1 - \frac{\sin^2 2x}{2} \right] \left[1 +$

$+\frac{16}{\sin^4 2x} \right] + 4 \geq \left[1 - \frac{1}{2} \right] (1 + 16) + 4 = 12,5$; но правая часть не

больше 12,5, поэтому одновременно $\sin^2 2x = 1$ и $\sin y = 1$; е) $\left[\frac{\pi}{4}(2k+1); \frac{\pi}{4}(2n-2k+1) \right]$. Оценим левую часть: $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2 \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y)^2 + 2 \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + 2 \operatorname{ctg}^2 x \operatorname{ctg}^2 y = (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y)^2 + 2 \left[\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y} \right] \geq 4$, так как первое

слагаемое неотрицательно, и $b + \frac{1}{b} \geq 2$ для всех $b > 0$. Правая же часть не больше 4. Поэтому $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg}^2 y$ и $\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y = 1$ и $\sin^2(x+y) = 1$.

8.82. а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n$. После замены $t = \cos x$ имеем

$\frac{2t^2 - 9t + 4}{t + 1} < 0$, откуда $t < -1$ или $\frac{1}{2} < t < 4$. Поскольку

$|\cos x| \leq 1$, приходим к неравенству $\cos x > \frac{1}{2}$; 6) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$. После

замены $t = \sin 2\pi x - \cos 2\pi x$ имеем $\sqrt{2}t^2 + 3t - 5\sqrt{2} \geq 0$, откуда

$t < -\frac{5}{\sqrt{2}}$ или $t \geq \sqrt{2}$. Поскольку $|t| \leq \sqrt{2}$, то $t = \sqrt{2}$; в) $-\frac{3\pi}{2} +$

$+4\pi n$. После замены $t = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$ имеем $t^2 - \sqrt{2}t - 4 \geq 0$,

откуда $t \leq -\sqrt{2}$ или $t \geq 2\sqrt{2}$. Так как $|t| \leq \sqrt{2}$, то $t = -\sqrt{2}$;

г) $\pi + 2\pi n$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. Поскольку $\sqrt{2} \sin \left[\frac{\pi}{4} - x \right] =$

$= \cos x - \sin x$, неравенство приводится к виду $(1 + \cos x) \times (2 \sin x - 1) \geq 0$. Первый множитель неотрицателен, поэтому

$\cos x = -1$ или $\sin x \geq \frac{1}{2}$; д) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$. Неравенство

имеет смысл при $\sin x \geq 0$ и $\cos x \leq 0$, поэтому x лежит во II четверти.

Возведя неравенство в квадрат (это преобразование равносильно, так как обе части неравенства неотрицательны), приходим к неравенству

$\sin x + \cos x > 0$, т. е. $\sin \left[x + \frac{\pi}{4} \right] > 0$; е) $2\pi n \leq x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$;

$\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x \leq \pi + 2\pi k$. Приводим неравенство к виду $0 \leq \sin x < \frac{1}{2}$;

ж) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$. Приводим неравенство к виду $2 \cos 2 \cos 4x \geq \sqrt{\cos 4x}$.

Так как $\cos 2 < 0$, то неравенство имеет смысл лишь при $\cos 4x \leq 0$;

но $\cos 4x \geq 0$ как подкоренное выражение; следовательно, $\cos 4x = 0$.

8.83. $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq -\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. После замены $t = \cos x$ получаем

$2t^2 + \sqrt{3}t - 3 \leq 0$, откуда $-\sqrt{3} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ и, поскольку $|\cos x| \leq 1$,

то $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. 8.84. $\frac{\pi}{6} \leq x < \pi - \operatorname{arctg} \left[\sqrt{7+2} \right]$. Должно быть

$\cos 2x \leq \frac{1}{2}$, т. е. $\cos^2 x \leq \frac{3}{4}$, откуда $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; с учетом условия $0 \leq x \leq \pi$ получаем $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$. Поскольку при $\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{4}$ правая часть неравенства отрицательна, при $x = \frac{\pi}{4}$ обращается в нуль, а левая часть положительна, то $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$ – решение неравенства. Пусть $\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{5\pi}{6}$, тогда обе части неравенства положительны и его можно возвести в квадрат. Разделив обе части неравенства на $\cos^2 x$ (при $x \neq \frac{\pi}{2}$), получим $\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x - 3 > 0$, откуда $\operatorname{tg} x < -2 - \sqrt{7}$ или $\operatorname{tg} x > \sqrt{7} - 2$. В промежутке $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, поскольку $\sqrt{7} - 2 < 1$, $\operatorname{tg} x > \sqrt{7} - 2$; в промежутке $\frac{\pi}{2} < x < \pi + \operatorname{arctg} [-2 - \sqrt{7}] = \pi - \operatorname{arctg} [2 + \sqrt{7}]$ верно неравенство $\operatorname{tg} x < -\sqrt{7} - 2$. Убедившись, что $x = \frac{\pi}{2}$ также входит в ответ, получаем все решения.

8.85. $0 < x < \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \leq x < \operatorname{arctg} \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

Глава 9. Элементы математического анализа

9.1. а) См. рис. 7; б) см. рис. 8; в) см. рис. 9; г) см. рис. 10; д) см. рис. 11; е) см. рис. 12; ж) см. рис. 13; з) см. рис. 14; и) см. рис. 15; к) см. рис. 16. **9.2.** y_1 – четная; y_2 – ни четная, ни нечетная; y_3 – нечетная. **9.3.** а) $a = 1/4$; б) $m = 2$. **9.4.** $f(x) = -(9x - 25)/14$; $g(x) = (x + 5)/14$. **9.5.** а) $(-\infty; 0) \cup (0; 2.5)$; б) $[-4; 2]$. **9.6.** $-3/2$. **9.7.** $[-1; 4]$. **9.8.** 2. **9.9.** а) $-8\pi/9; -4\pi/9; -2\pi/9$; б) $-\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \pm \frac{1}{3} \arccos \frac{1}{5} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$. **9.10.** $(0; +\infty)$. **9.11.** $x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_2 = \pi l$, $k, l \in \mathbb{Z}$. **9.12.** $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. **9.13.**

Возрастает при $x < -4/5$, $x = -4/5$ – точка максимума, убывает при $x > -4/5$. **9.14.** $y_{\min} = y(-1) = 0$, $y_{\max} = y(-2) = 17$. **9.15.** $x = 0$ – точка максимума, $x = 2$ – точка минимума. **9.16.** а) $(-\infty; 0)$ и $(8; 12)$ – промежутки убывания, $(0; 8)$ и $(12; +\infty)$ – промежутки возрастания; $x = 0$ и $x = 12$ – точки минимума, $x = 8$ – точка максимума; б) $(-\infty; 0)$ и $(2; +\infty)$ – промежутки возрастания, $(0; 1)$ и $(1; 2)$ – промежутки убывания; $x = 0$ – точка максимума, $x = 2$ –

точка минимума. **9.17.** $\max f(x) = f\left[\sqrt{2}\right] = 4\sqrt{2}$, $\min f(x) = f(3) = -9$. **9.18.** **9.19.** а) $x_{\min} = 1/4$; б) $x_{\min} = -i$, $x_{\max} = 3$;

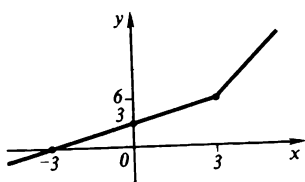


Рис. 7

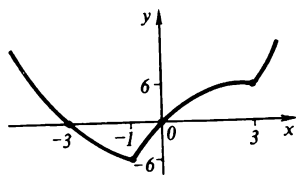


Рис. 8

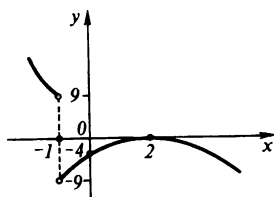


Рис. 9

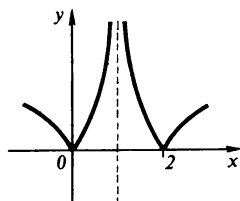


Рис. 10

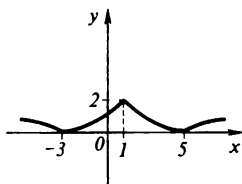


Рис. 11

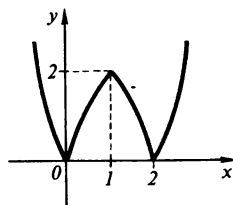


Рис. 12

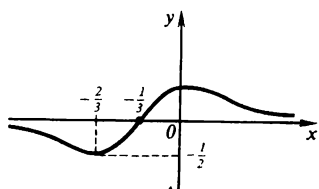


Рис. 13

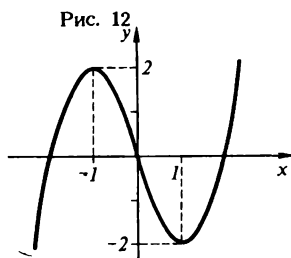


Рис. 14

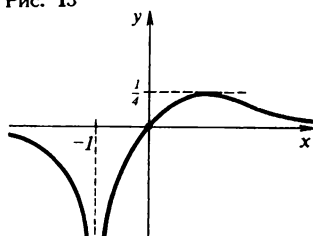


Рис. 15

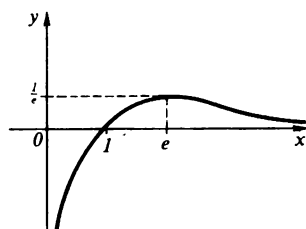


Рис. 16

в) $x_{\min} = 1/6$. 9.20. а) 0 и 28; б) 2 и 227; в) $x_{\max} = 1$, $y_{\min} = -52$; г) $-\ln 49$; д) 4. Ясно, что $|y| \leq 4$. В то же время $y = 4$ при $x = \pi/2$. 9.21. $f(x) = (1 - t^2)t$, где $t = \sin x$. Исследуйте на минимум функцию $g(t) = (1 - t^2)t$ при $t \in [-1; 1]$. 9.22. а) 0,182; б) $y_{\max} = y(-1) = 79/25$. 9.23. $x = -1$ и $x = 1/2$ — точки минимума; $x = 0$ — точка максимума; $(-1; 0)$ и $(1/2; +\infty)$ — промежутки возрастания; $(-\infty; -1)$ и $(0; 1/2)$ — промежутки убывания. 9.24. $\min f(x) = 8/33$, $\max f(x) = 1$. Выполните замену $t = \cos 2x$. 9.25. $(-1; 0)$ — промежуток убывания, $(0; +\infty)$ — возрастания; $x = 0$ — точка минимума. 9.26. $-\frac{1}{6}$ при $a \geq -1$; $-\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a$ при $a < -1$. 9.27. $y = -2x + 4$. 9.28. -4. 9.29. 2. 9.30. $y = -2x + 6$. 9.31. Пусть даны 2 дифференцируемые функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Пусть также $f(x_0) = g(x_0)$, причем функция $h(x) = f(x) - g(x)$ имеет неотрицательную производную при $x > x_0$. Тогда неравенство $f(x) > g(x)$ выполняется при всех $x > x_0$. Например (пункт б), пусть $f(x) = e^x$, $g(x) = x + 1$. Ясно, что $f(0) = g(0) = 1$, причем $h'(x) = e^x - 1 > 0$ при $x > 0$. Таким образом, функция $h(x)$ возрастает при $x > 0$ и, следовательно, $e^x > x + 1$ при $x > 0$. 9.32. а) 2. Точек пересечения столько же, сколько корней у уравнения $2^{2x} = x + 4$. Исследуйте на монотонность функцию $g(x) = 2^{2x} - x - 4$; б) 1. 9.33. а) 3; б) 2; в) 1. Очевидно, есть корень в области $x < 0$. При $x > 0$ уравнения равносильно такому: $\ln x/x = 1/2$. Исследуйте функцию, стоящую в левой части, и докажите, что ее максимум равен $1/e < 1/2$; г) 1. 9.35. $[2\sqrt{3}; +\infty)$. 9.36. 2 корня при $|a| > 32$; 1 корень при $|a| = 32$; 0 при $|a| < 32$. 9.37. 2 при $a > 3\sqrt[3]{2}$, 1 при $a = 3\sqrt[3]{2}$; 0 при $a < 3\sqrt[3]{2}$. 9.38. $a = 1/2$. 9.39. $a = 1$. 9.40. а) $f(x) > 0$ при $x \in [-\infty; -\sqrt{6}] \cup [3/2; \sqrt{6}]$; $f(x) < 0$ при $x \in [-\sqrt{6}; 3/2] \cup [\sqrt{6}; +\infty]$; б) убывает на промежутках $(-\infty; -1)$ и $(2; +\infty)$; возрастает при $x \in (-1; 2)$; в) 1 корень при $a < -25$ и $a > 2$; 2 корня при $a = 2$ и $a = -25$; 3 корня при $-25 < a < 2$. 9.41. $C = (7/3; -26/9)$. 9.42. $[5 - \sqrt{10}]/6$. Если x — абсцисса точки D , то $S_{ABCD} = x|(-x^2 + 2x - 2) - (3 - 3x)| = x|x^2 - 5x + 5|$. 9.43. (3; 2). 9.44. $8 \times 8 \times 4$. 9.45. $2 \times 1 \times 3$. 9.46. $3/8$ и $33/16$. 9.47. 12. 9.48. $(1/2; 3/4)$. 9.49. $\sqrt{S/\sin \alpha}$. 9.50. $\sqrt[3]{V}$. 9.51. $\pi R^2 h/27$. 9.52. Высота конуса $4R$, радиус основания $R\sqrt{2}$.

Глава 1. Механика

Кинематика. 1.1. Может. 1.2. 72 км/ч. 1.3. 45 с. 1.4. 0,5 м/с. 1.5. 174 км/ч; $4,3^\circ$. 1.6. 3. 1.7. См. рис. 17. 1.8. $v_1 = t$; $v_2 = 3 - 3t/5$; см. рис. 18. 1.9. 16 м. 1.10. 9 м/с. 1.11. 60 с. 1.12. $(t_1^2 + t_2^2)/(2t_2)$. 1.13. 102 мин. 1.14. $t_2 > t_1$. 1.15. 7 с; 240,1 м. 1.16. 6 м. 1.17. 40 м. 1.18. 8 с; 4 с. 1.19. 8 м/с; 0,8 м/с²; -1,6 м/с²; 15 с; 4 м/с. 1.20. 500 м. 1.21. 10 м/с. 1.22. 7,3 с. 1.23. 45° . 1.24. 25 м/с. 1.25. 17,3 м. 1.26. 2,8 м. 1.27. 7,6 м/с; 22° . 1.28. Отрезок прямой $y = -2x$ с координатами концов $(-4; 8)$ и $(4; -8)$. 1.29. Окружность $x^2 + y^2 = R^2$; $\omega^2 R$. 1.30. Парабола $y = a - 2x^2/a$.

Динамика. 1.31. 20 м/с². 1.32. 0,2 Н. 1.33. $\leq 0,15$ рад. 1.34. $mg \sin \alpha$ при $\tan \alpha < \mu$; $\mu mg \cos \alpha$ при $\tan \alpha > \mu$. 1.35. 6 кН. 1.36. 5 Н. 1.37. 4,5 м/с². 1.38. 0,8 Н. 1.39. 9 см. 1.40. 10 Н; 2,5 Н. 1.41. 29 Н. 1.42. $F/(1 + t/\tau)$. 1.43. 1 Н. 1.44. 0,55 с. 1.45. 1 м/с². 1.46. $\arctg(2\mu)$. 1.47. 0. 1.48. 0,33. 1.49. 0,025. 1.50. $\omega_0 R/(\mu g)$; $\omega_0^2 R/(4\pi\mu g)$. 1.51. 11 с⁻¹¹. 1.52. 45° . 1.53. 2,5 м/с²; 15 кН. 1.54. 2,8 м/с²; 60° . 1.55. 9,8 км/с. 1.56. $3 \cdot 10^3$ кг/м³. 1.57. $4,2 \cdot 10^7$ м. 1.58. 352 км; 3 ч. 1.59. 6,4 см. 1.60. $\mu g(m_1 + m_2/2)$. 1.61. $Mg \sin \alpha/m$; $M \tan \alpha/m$. 1.62. 0,52 с. 1.63. 25 Н. 1.64. $3m \cos \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha/\mu)$ при $\mu < \tan \alpha$. 1.65. $m(g - v^2/(\sqrt{2}l))$.

Статика. 1.66. 1 кг; 1,5 кг. 1.67. 600 Н; 400 Н; 333 Н. 1.68. $\arctg(1/3)$. 1.69. 45 Н·м. 1.70. $4/3 mg \tan \alpha$. 1.71. $3/4 \rho_{\text{воды}}$. 1.72. 125 Н. 1.73. Да. 1.74. 1,1 Н. 1.75. 0,735 Н. 1.76. 29 см от свободного конца стержня. 1.77. 1 см от центра квадрата. 1.78. $2r/\pi$ от центра. 1.79. 5/4. 1.80. 1,67 кг; 0,33 кг.

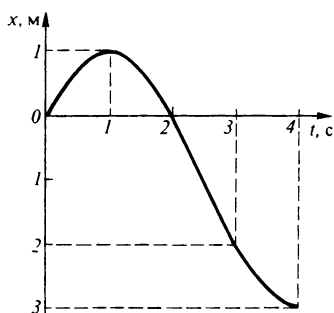


Рис. 17

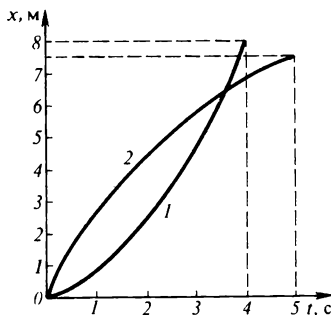


Рис. 18

Законы сохранения в механике. 1.81. $2mv \sin \alpha$. 1.82. 1 м/с. 1.83. $v_0/3$. 1.84. $2/3$ м/с. 1.85. 0,625 м. 1.86. 30,6 м/с. 1.87. $10 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. 1.88. $mg(vt + h/\sin \alpha) \sin \alpha$. 1.89. 150 Дж. 1.90. $mg(H + h(1 - 1/n))$. 1.91. 1500 Н/м. 1.92. -7,2 Дж. 1.93. $mg l(\mu_1 + \mu_2)/2$. 1.94. -81,25 Дж. 1.95. 36 Дж. 1.96. $2mgh$. 1.97. $mgv/2$. 1.98. 9 Дж. 1.99. 18 Дж. 1.100. 0,05 Вт. 1.101. $\mu mgh \operatorname{ctg} \alpha$. 1.102. 2,58 м/с; 5,16 м/с. 1.103. 75 Вт. 1.104. $5R/3$; $5R/2$. 1.105. $50h/27$. 1.106. $\sqrt{5gl}$. 1.107. $\arccos(1 - 5R/(2l))$. 1.108. $2\sqrt{3gl/5}$. 1.109. 31,3 см/с. 1.110. 0,2 м/с. 1.111. $v_0\sqrt{(m+M)/M}$. 1.112. $3/4$. 1.113. $\arccos 0,87$. 1.114. 12 Дж. 1.115. 0,9. 1.116. $\sqrt{(mv_0^2)/(m+M)^2 + 2gH}$. 1.117. $\arccos(1 - m_1^2/(m_1 + m_2)^2)$. 1.118. $2v\sqrt{Qm} - 4Q$. 1.119. $((m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2)/(m_1 + m_2)$; $((m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1)/(m_1 + m_2)$. 1.120. 3. 1.121. $E_0/4$; $3E_0/4$. 1.122. $13m/5$. 1.123. $(\sqrt{n} - 1)/(\sqrt{n} + 1)$. 1.124. $M \cos 2\alpha$. 1.125. $v_0/5$; $2\sqrt{3}v_0/5$; $2\sqrt{3}v_0/5$.

Механика жидкостей и газов. 1.126. 7,5 см. 1.127. $54,3 \cdot 10^5$ Па. 1.128. $1,4 \cdot 10^3$ Н. 1.129. 32 см. 1.130. $m/(\rho_{\text{воды}} \pi R^2)$. 1.131. 20 г. 1.132. 1,74 см. 1.133. 0,3 Н. 1.134. $\rho_{\text{воды}} g S \Delta h$. 1.135. $m/(2\rho_{\text{воды}} S)$.

Глава 2. Молекулярная физика.

Тепловые явления

Газы, пары, жидкости. 2.1. 0,4 м. 2.2. 320. 2.3. $4 \cdot 10^{22}$. 2.4. 200 м/с. 2.5. $0,53 \text{ м}^3$. 2.6. Увеличится на 44 %. 2.7. $8 \cdot 10^5$ Па. 2.8. Уменьшилось на 4 %. 2.9. $1,2 \cdot 10^{-23}$ Дж. 2.10. На 4 %. 2.11. См. рис. 19.

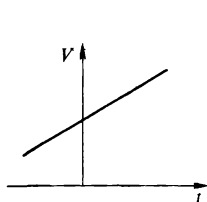


Рис. 19

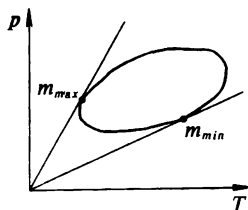


Рис. 20

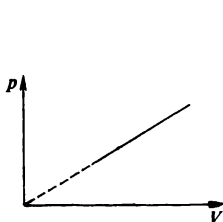


Рис. 21

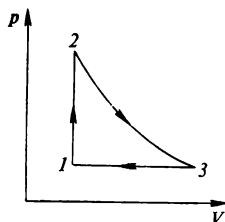


Рис. 22

2.12. $p_a(n-1)/(\rho g)$, где p_a – атмосферное давление, ρ – плотность воды. 2.13. 30 см. 2.14. 8,9 см. 2.15. 0,96. 2.16. 4 Т. 2.17. 1 кг/м³; $5,4 \cdot 10^{-26}$ кг. 2.18. 546 К. 2.19. 0,1 м. 2.20. 10^5 Па. 2.21. 10. 2.22. Уменьшилась вдвое. 2.23. См. рис. 20. 2.24. 375 кПа. 2.25. См. рис. 21. 2.26. См. рис. 22. 2.27. Уменьшилось на 25 %. 2.28. 2,6 г; 0,9 л. 2.29. 750 мм рт. ст. 2.30. 8 атм. 2.31. 346 К. 2.32. 20,1 л. 2.33. Увеличится на 0,06 Н. 2.34. 0,67 г. 2.35. 300 Н. 2.36. Да. 2.37. $2,5 \cdot 10^7$ Па. 2.38. 77 г. 2.39. 110 кПа. 2.40. 5 см. 2.41. $p_1/(2p_0 - p_1)$. 2.42. 84,1 кПа. 2.43. 27,6 %; 72,4 %. 2.44. 0,51 кг/м³. 2.45. 800 К. 2.46. 80. 2.47. 27 %. 2.48. 72 %. 2.49. 60 %. 2.50. 58 %. 2.51. 5 г. 2.52. 62,7 %. 2.53. 15,5 мин. 2.54. 2,5 г. 2.55. 20 кг. 2.56. 11,5 мг. 2.57. 2 см. 2.58. 9 мм. 2.59. $2\pi\sigma^2/(\rho g)$, где σ – коэффициент поверхностного натяжения, ρ – плотность воды. 2.60. 1,6 мДж.

Основы термодинамики. 2.61. 32,5 °С. 2.62. $2 \cdot 10^5$ Дж. 2.63. 32 К. 2.64. 8,5 л. 2.65. 33 км. 2.66. 0,89. 2.67. 100 °С. 2.68. 0 °С; 575 г воды; 825 г льда. 2.69. 265 км. 2.70. 61 мин. 2.71. 24 °С. 2.72. 2,2 м. 2.73. 1 атм. 2.74. 2,3 МДж. 2.75. 1,5 кДж. 2.76. 1,1. 2.77. 3,3 МДж; 6,1 МДж. 2.78. $R(T_2 - T_1)$. 2.79. $3/2 p_1 V_1 (V_1^2/V_2^2 - 1)$. 2.80. 300 К. 2.81. $mR(T_2 - T_1)/(2M)$. 2.82. $(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)/2$. 2.83. 200 кПа. 2.84. 2 кДж. 2.85. 40 К; 2,5 кДж. 2.86. O₂. 2.87. 79 Дж. 2.88. 1,1 кДж; 56 кДж. 2.89. 115 кДж. 2.90. $5/2(p_2 - p_1)V_1$. 2.91. $mR(T - T/n)M$. 2.92. $R(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2$. 2.93. $RT/4$. 2.94. 1162 Дж. 2.95. 8 кДж. 2.96. 12 кДж. 2.97. 2,5. 2.98. 15 %. 2.99. 300 Дж. 2.100. 25 %. 2.101. 8,2 кг. 2.102. 202,7 кг. 2.103. $3\nu R\Delta T/(2(1 - \eta))$. 2.104. 5 кг. 2.105. $\eta/(2 - \eta)$.

Глава 3. Основы электродинамики

Электростатика. 3.1. $-1/3$ Кл или -3 Кл. 3.2. На 0,34 м левее первого заряда. 3.3. О, если по диагоналям квадрата расположены одноименные заряды; $4\sqrt{2}q/a^2$, если – разноименные. 3.4. 80 В/м; под углом 45° к горизонту. 3.5. 3°. 3.6. 8,7 Мм/с; под углом 23°40' к силовым линиям. 3.7. 14,8 м/с²; 15,5 мН. 3.8. 1,7 с⁻¹. 3.9. $Qq/(8\pi^2\epsilon_0 R^2)$. 3.10. 85 В. 3.11. 0,4 кВ. 3.12. 12,5 см. 3.13. 22,5 В. 3.14. $q/(4\pi\epsilon_0 R)$. 3.15. 1,2 Мм/с. 3.16. $(m\omega^2/e)g$; $(m\omega^2 R^2)/(2e)$; здесь m – масса, e – заряд электрона. 3.17. -4 мДж. 3.18. 1,6 мН. 3.19. $e^2/(\pi\epsilon_0 mv_0^2)$. 3.20. 0,95 м/с. 3.21. 3 см. 3.22. $8,85 \cdot 10^{-11}$ Кл. 3.23. $Uvbe_0(\epsilon - 1)/d$. 3.24. 165 В; 55 В. 3.25. $3/7 \cdot 10^{-4}$ Кл; $4/7 \cdot 10^{-4}$ Кл. 3.26. 2/3. 3.27. 7,3 нФ. 3.28. 2. 3.29. 50 мкКл; 0. 3.30. 13. 3.31. 2 мкДж. 3.32. Уменьшится в ϵ раз. 3.33. 20 с. 3.34. $-CU^2/4$; $-CU^2/2$. 3.35. 0,4 мкДж. 3.36. 10 с. 3.37. $C(U - \mathcal{E})^2/2$. 3.38. 10^{-8} Дж. 3.39. $CU^2(\epsilon^2 - 1)/4$. 3.40. $\mathcal{E}^2 C/3$.

Законы постоянного тока. 3.41. Точки делят длину проволоки в отношении 1:9. 3.42. 0,4 А. 3.43. 1 Ом. 3.44. R . 3.45. 5 Ом. 3.46. 1 кВ. 3.47. 1 В. 3.48. 29,6 А. 3.49. 2 %. 3.50. 10 мкКл. 3.51. 4 $\mathcal{E}/9$. 3.52. 0,1 Ом. 3.53. 4 Ом. 3.54. 0,16 Ом. 3.55. 1 Ом. 3.56. 80 А. 3.57. 3,2 Ом. 3.58. $\mathcal{E}/(R + r)$ или 0. 3.59. 4 мкКл. 3.60. 6,5 мкКл;

10 мкКл. 3.61. 0,13 г. 3.62. 40 Вт. 3.63. 10,2 м. 3.64. 10/9. 3.65. 420 Дж. 3.66. 0,1 Ом. 3.67. 4,5 Вт. 3.68. 5,5 Ом. 3.69. 24,2 Ом. 3.70. а) 10 А; 20 В. 2 Ом; б) 5 А; 40 В; 8 Ом. 3.71. 6 В. 3.72. 45 Вт. 3.73. 40. 3.74. 0,75 Ом. 3.75. 8 Дж. 3.76. 35 мин; 8,6 мин. 3.77. 9,5 кОм. 3.78. \sqrt{n} . 3.79. 50 %. 3.80. 50 А.

Магнитное поле. Электромагнитная индукция. 3.81. $B^2 l^2 v / R$. 3.82. 5 мТл. 3.83. $mg \tan \alpha / (Il)$. 3.84. 2,25 Мм/с. 3.85. 180° . 3.86. 0,15 А. 3.87. 3,3 кН/м². 3.88. 0,1 м. 3.89. 4. 3.90. 1/4. 3.91. 0,2 см. 3.92. 1 мс. 3.93. 8 кВ/м. 3.94. 0,5 Мм/с; перпендикулярно обоим полям. 3.95. а) Да, по часовой стрелке; б) нет. 3.96. Токи одинаковы. 3.97. В кольцо — по часовой стрелке. 3.98. 1 мТл. 3.99. 0,2 мВ. 3.100. 0,4 А. 3.101. 0,25 Тл. 3.102. 2,5 мкВт. 3.103. 50 мкКл. 3.104. 0,05 Кл. 3.105. 155° .

Глава 4. Колебания и волны

Механические колебания и волны. 4.1. 4 см; 2,8 см. 4.2. 2 с. 4.3. 2. 4.4. Во втором; в 1,1 раза. 4.5. 0,09 м; 0,25 м; 0,6 с; 1 с. 4.6. $\sqrt{T_1^2 + T_2^2}$. 4.7. 2,4 с. 4.8. 2,6. 4.9. 5,5 м/с²; вниз. 4.10. 2 мкКл. 4.11. $2mg/Q$; вверх. 4.12. 0,5 с. 4.13. 1 м/с. 4.14. Уменьшится в 1,8 раза. 4.15. $\sqrt{(k_1 + k_2)/m}$. 4.16. 90 Н/м. 4.17. 0,63 с. 4.18. 1,4 с. 4.19. 51,1 Н. 4.20. $v_0 \sqrt{k/m}$. 4.21. $\mu(m + M)g/(2k)$. 4.22. 0,79 м. 4.23. 1,75 м/с. 4.24. 4 м. 4.25. 450 м.

Электромагнитные колебания и волны. 4.26. 1,41 А. 4.27. 16 Вт. 4.28. 1,25. 4.29. 2. 4.30. 95 %. 4.31. 1 Гн. 4.32. 10^7 с^{-1} . 4.33. Можно, если конденсаторы соединить параллельно. 4.34. 3,3 мГн. 4.35. 3 мкФ. 4.36. 10 А. 4.37. 5 мВт. 4.38. 1,6 Дж. 4.39. 266 м. 4.40. 2,3 км.

Глава 5. Оптика

5.1. См. рис. 23. 5.2. 0,5 м. 5.3. 70° . 5.4. Вверх; 2 м/с. 5.5. 20 см. 5.6. 73° . 5.7. H . 5.8. 1,4, 5.9. $2 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. 5.10. 3,7 см. 5.11. 0,2 см. 5.12. 60° . 5.13. 50° . 5.14. 1,5 см. 5.15. 1 м. 5.16. 60° . 5.17. $R/(n - 1)$. 5.18. 5 м. 5.19. 1,2 см. 5.20. 36° ; 72° . 5.21. а) Собирающая; б) рассеивающая. 5.22. См. рис. 24. 5.23. $F/2$. 5.24. 4,5 см;

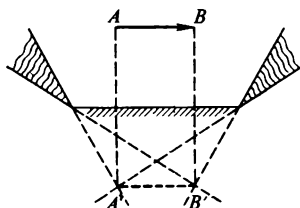


Рис. 23

18 см. 5.25. 0,1 м. 5.26. 50 см. 5.27. 3d. 5.28. 60 см. 5.29. Собирающая; 10 см. 5.30. $xx' = F^2$; 5. 5.31. $2F$. 5.32. 0,21 м. 5.33. См. рис. 25; $1/F = 1/d - 1/f$. 5.34. 6 см. 5.35. 4 см/с. 5.36. 3 см/с. 5.37. 32 см. 5.38. 10^{-3} с. 5.39. 0,2 м. 5.40. 0,1 м. 5.41. $1/F_1 + 1/F_2$. 5.42. 6 см. 5.43. Меньше 10 см. 5.44. $-2F/3$. 5.45. -20 см. 5.46. 60 см. 5.47. 5,2 см. 5.48. L . 5.49. 250 см; 23 см. 5.50. От ∞ до 50 мм; 4. 5.51. 11,5 см. 5.52. 3,3 дптр. 5.53. 0,53 мкм; красный. 5.54. 26. 5.55. Да. 5.56. $\lambda/(2 \sin \alpha)$. 5.57. $1,5 \cdot 10^{-5}$ см. 5.58. 1,22 м. 5.59. 30° . 5.60. $3 \cdot 10^{-7}$ м.

Глава 6. Квантовая физика

Световые кванты. 6.1. $3 \cdot 10^{-7}$ м. 6.2. $4 \cdot 10^{-13}$ Дж. 6.3. 1,5. 6.4. 4. 6.5. $1,3 \cdot 10^{18}$. 6.6. $1,3 \cdot 10^{17}$. 6.7. $1,7 \cdot 10^{-10}$ Н. 6.8. $4 \cdot 10^{-7}$ Н. 6.9. 930 Н. 6.10. 4,4 эВ. 6.11. $6,2 \cdot 10^5$ м/с. 6.12. $4 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с. 6.13. 32 см. 6.14. $8 \cdot 10^{-10}$ А. 6.15. $hc/\lambda - (eBR)^2/(2m)$.

Атом и атомное ядро. 6.16. 1,9 эВ. 6.17. 13,6 эВ. 6.18. Нет. 6.19. $2W_0$; $5W_0$. 6.20. 5. 6.21. Сдвинется на 2 клетки влево; на 1 клетку вправо. 6.22. 11. 6.23. β ; β ; α . 6.24. Нейтрон; протон; α -частица. 6.25. $3,3 \cdot 10^5$ с. 6.26. 53 сут. 6.27. 100 мин. 6.28. $2,3 \cdot 10^{13}$. 6.29. 54. 6.30. 190 сут. 6.31. 28 МэВ. 6.32. $1,6 \cdot 10^3$ км/с. 6.33. 14,9 МэВ. 6.34. α -частица; $8,5 \cdot 10^{11}$ Дж. 6.35. 12,8 МэВ.

МАТЕРИАЛЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ

1992 года

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

М а т е м а т и к а

В а р и а н т 1

1. $\pi(6n+1)/6$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. На продолжении. 3. $\frac{p+q+pq}{6(p+q-2pq)}$ при $p \neq 0$; $1/6$ при $p = 0$. 4. 36. 5. 8. 6. $(-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

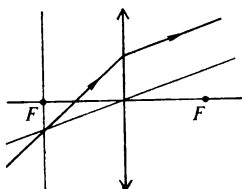


Рис. 24

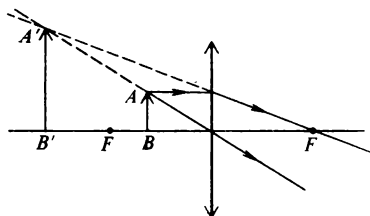


Рис. 25

В а р и а н т 2

1. Второе число больше. 2. $\pi(4k+1)/2$, $k \in \mathbb{Z}$ 3. $[2; 11)$. 4. 11 часов. 5. $(5 + \sqrt{15})/4$. 6. $a > 2\pi - 1/8$.

В а р и а н т 3

1. $((-1 - \sqrt{3})/2; (-1 + \sqrt{3})/2)$. 2. $\pi/2 + 2\pi k$; $(-1)^k \arcsin 1/3 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ 3. $2^{2/11}$. 4. $\sqrt{4S^2 - 2b^2S \sin 2\alpha + b^4 \sin^4 \alpha} / (b \sin \alpha)$. 5. $a_1 = 2$, $d = 3$. 6. \sqrt{pq} . 7. $f(x) = \begin{cases} \log_3(x/3) & \text{при } x > 0, \\ -\log_3(-x/3) & \text{при } x < 0; \end{cases}$ корни

уравнения: 81; $-1/9$. 8. $R|2\sqrt{3} \cos \varphi - 3|/(3 \sin \varphi)$.

В а р и а н т 4

1. -1 . 2. $[2\pi k; \pi/6 + 2\pi k)$, $(5\pi/6 + 2\pi m; \pi(2m+1)]$, $k, m \in \mathbb{Z}$
3. $10 \pm 4\sqrt{3}$. 4. $[15; 40]$ (в процентах). 5. а) $(-23; 0)$, б) $(-\infty; -23) \cup (0; +\infty)$.

В а р и а н т 5

1. $-\pi/36 \pm \pi/18 + \pi k/6$, $k \in \mathbb{Z}$ 2. 13. 3. 216. 4. $(12; -8)$. 5. 5.

В а р и а н т 6

1. $\pi(4k-1)/8$; $\pi(4k+1)/16$, $k \in \mathbb{Z}$ 2. 90 %. 3. 0. 4. $81(\sqrt{3}-1)/2$. 5. $(-\infty; 5/3)$.

В а р и а н т 7

1. 184. 2. $[(\sqrt{2}-1)/3; +\infty)$. 3. $\{1/7; 7^{(-3-\sqrt{2})/7}; 7^{(-3+\sqrt{2})/7}\}$.
4. $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{2}{5} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ 5. $155\sqrt{3}/84$. 6. $(1; 513/2; 128)$, $(-1; -513/2; -128)$.

В а р и а н т 8

1. $\pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$ 2. $a = 2$, $b = -8$, $c = 8$. 3. $[1/81; 0) \cup [3; +\infty)$. 4. 60. 5. 4; $19/4$.

В а р и а н т 9

1. 1. 2. $x = -1$; $2 \leq x < 5$. 3. 133 и 54. 4. $2\pi/3$. 5. 1. 6. $b = 4$; $9/4 \leq b \leq 5/2$.

В а р и а н т 10

1. $\pi(8k-3)/2$, $k \in \mathbb{Z}$ 2. $(8\log_5 2 - 6\log_2 5; 8\log_2 5 - 12\log_5 2)$. 3. 2.
4. $u = 6$; $v = 4$. 5. $3\sqrt{3}$.

В а р и а н т 11

1. $\pi(6k-1)/6$, $k \in \mathbb{Z}$ 2. $(1; 7/2]$. 3. $\frac{8}{5}\sqrt{\frac{7}{19}}$. 4. 30 км/ч. 5. 0; $\pm 2\sqrt{2}$.

В а р и а н т 12

1. $-2\log_2 3$. 2. $(-1)^k \arcsin 2/3 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ 3. $(-\infty; 4) \cup (4; 8) \cup [10; +\infty)$.
4. 14. 5. $(-\sqrt{10}; -\pi) \cup (-\pi; -3) \cup (3; \pi) \cup (\pi; \sqrt{10})$. 6. $a = 3$,
 $S = 18$.

Ф и з и к а

Физический факультет

1. $> \mu_1 m_1 g + 1/2 \mu_2 m_2 g$. 2. $0,6\sqrt{gl}$. 3. $\sqrt{m/kg}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$.
4. $2\pi\sqrt{2R/g}$. 5. 0,5. 6. $AR/(2\rho)$. 7. $4 mgR/(B^2 r^2)$. 8. $C \mathcal{E}_0^2/2$.
9. $\frac{h_2 \operatorname{tg} \alpha_2 - h_1 \operatorname{tg} \alpha_1}{\sin \alpha_1 / \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - \sin \alpha_2 / \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_2}}$. 10. $-5/3$ м; 5 м.

- Механико-математический факультет. 1. 52 км/ч. 2. 45° . 3. 1,33 м/с.
4. $16,8^\circ \text{C}$. 5. $\sqrt{2}$. 6. 20 см. 7. 7,2 В; 4,8 В. 8. 0,8 Ом. 9. 90 см.
10. 5,2 см.

- Факультет вычислительной математики и кибернетики. 1. 2 км.
2. 64 м. 3. 0,1 Дж. 4. 29,4 Дж. 5. 7°C . 6. 4,8 кг. 7. 10^{-4} Кл.
8. 0,2 Дж. 9. 80° . 10. > 0 .

- Химический факультет. 1. 10 см. 2. $8,3 \cdot 10^{-3}$ м. 3. $0,01^\circ \text{C}$.
4. 0,063 Н. 5. $2,2 \text{ м}^3$. 6. $9 \cdot 10^{-5}$ Дж. 7. 4. 8. $3,14 \cdot 10^{-6}$ Кл.
9. 2,2 км/с. 10. 45 см.

- Географический факультет. 1. 8,3 км/ч. 2. 200 Дж, если угол $\alpha > 0$;
600 Дж, если $\alpha < 0$. 3. 25 Дж. 4. 7,5 см. 5. $1,8 \cdot 10^{14}$. 6. 20,4 м.
7. 131°C . 8. 1 А. 9. 90 Ом. 10. 0,15 м.

Независимый московский университет

М а т е м а т и к а

В а р и а н т 1

2. $1/3$. 3. Да. 4. $f(x) = \text{const}$. 10. $1 \geq k > (\sqrt{5} - 1)/2$.

В а р и а н т 2

2. Нет. 3. $\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$. 4. $1/4$. 8. Да.

Новосибирский государственный университет

Физика

Вариант 1

1. $\sqrt{(2v^2/a)^2 + L^2} - 2v^2/a$. 2. $2p(V/T - V_0/T_0)/R$. 3. $RCmg/(m + B^2 l^2 C)$. 4. 10^{-3} см. 5. При малом угле наклона плоскости сила, прижимающая к ней цилиндр, заметно больше силы, прижимающей цилиндры друг к другу. В результате между цилиндрами возникает проскальзывание, а между плоскостью и цилиндром — нет. Поэтому нижний цилиндр в этом случае не слишком мешает верхнему скатываться вращаясь. При большом угле наклона прижимающая сила между цилиндрами больше, и верхний цилиндр просто соскальзывает по плоскости. Критический угол наклона равен 45° .

Вариант 2

1. $\rho g(H_1 h_1 - H_2 h_2)/(h_1 - h_2)$. 2. $a - 2\mu N/m$ при $a > 2\mu N/m$ и 0 при $a \leq 2\mu N/m$. 3. 0; $I_0 \sqrt{1 + CR^2/L}$. 4. Подлить 0,1 г воды. 5. Причина — в явлении полного внутреннего отражения света.

Вариант 3

1. $D/2^N$. 2. $m(k-1)(2v+ku)(qB)$. 3. $\sqrt{g(2+(\sqrt{5}-1)M/m)}$. 4. 10. 5. Параллельное подключение конденсатора к диоду позволяет переменному току проходить через лампу в течение полупериода, неиспользуемого при отключенном конденсаторе. Поэтому лампа разогревается и светит сильнее.

Санкт-Петербургский государственный университет

Математика

Вариант 1

1. 4,5 и 6 км/ч. 2. $x = (-1)^k \arcsin 5/8 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 3. $a > 10/17$. 4. $2\pi + 48/25 + 4 \arctg 3/4$, $2\pi - 48/25 - 4 \arctg 3/4$. 5. $h = r = \sqrt[3]{V/\pi}$.

Вариант 2

1. -1; 2; 5 или 5; 2; -1. 2. 1) $x = 2m$; $y = 2m/(2m-1)$; 2) $x = 2m/(2m-1)$, $y = 2m$; 3) $x = k \pm \sqrt{k^2 - 2k}$, $y = 2k/x$; $m \in \mathbb{N}$, $k = 2, 3, \dots$. 3. $x = \pi/4 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 5. $1 - \sqrt[3]{3/\pi}$.

Московский авиационный институт

Физика

Вариант 1

1. $0,33 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$. 2. $1,25 \cdot 10^6 \text{ Па}$. 3. 1768 Дж . 4. $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/кг}$.
5. $1/(\alpha - 1)$. 6. $1,57 \cdot 10^{17} \text{ кг}$.

Вариант 2

1. 3 Н . 2. $0,2$. 3. 2080 м/с . 4. 20 Вт . 5. $0,17 \text{ Кл}$. 6. $2,12 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Московский государственный авиационный технологический университет

Математика

Вариант 1

1. $x = 2$. 2. Возрастает при $-\infty < x < -\frac{9}{2}$ и при $-\frac{1}{2} < x < +\infty$, убывает при $-\frac{9}{2} < x < -\frac{1}{2}$. 3. $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{17}-1}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 4. При $a \leq 41/8$. 5. Меньше, чем 6 часов. 6. 5, 12 и 13.

Вариант 2

1. $x = 1$. 2. Возрастает при $-\infty < x < 2$ и при $4 < x < +\infty$, убывает при $2 < x < 3$ и при $3 < x < 4$. 3. $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 4. При $k \leq -2$.
5. Не более 60 км/ч . 6. 4,5.

Физика

Вариант 1

1. 25 м/с . 2. $1,73 \cdot 10^{-2} \text{ м}$; $2 \cdot 10^{-10} \text{ м}$. 3. 40 В . 4. 30° . 5. Больше 2 кг . 6. $0,2 \text{ А}$; 40 мкКл .

Вариант 2

1. 20 Ом . 2. 40 см . 3. 45° . 4. $70,6 \text{ Н}$. 5. 10^5 Па . 6. 20 м/с .

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. 4 детали; 2 детали. 2. $\{2\pi/3; 7\pi/12; \pi\}$. 3. $\{3/2\}$. 4. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. 5. 12. 6. $-2 \leq a \leq 1/4$. 7. 15; 1:7.

В а р и а н т 2

1. 8 деталей. 2. $\{5\pi/4\}$. 3. $\{1/2\}$. 4. $(-\infty; 1/2)$. 5. $\{3\}$. 6. $a \leq -1/4$.
7. 7; $\arccos 6/7$.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Ф и з и к а

1. 8. 2. 30 м. 3. 104 кПа. 4. 26,7 %. 5. $1,7 \cdot 10^{-9}$ м. 6. 2,42 м.
7. 0,3 м. 8. 0,05 Кл. 9. 0,1 м. 10. $2 \cdot 10^{-9}$ с; $1,25 \cdot 10^{-9}$ с.

Московский инженерно-строительный институт

М а т е м а т и к а

В а р и а н т 1

1. 4. 2. $\pm \sqrt{6/7}$. 3. $(-\infty; 1) \cup [3; +\infty)$. 4. $(-\infty; -4) \cup (-2; 0) \cup (2; +\infty)$.
5. $\sqrt{55/3}$. 6. $[6; 12) \cup (12; +\infty)$. 7. $9\sqrt{3}$.

В а р и а н т 2

1. -1. 2. $1/6$. 3. $(0; 2] \cup [4; +\infty)$. 4. $(-7; 11/2]$. 5. $3/5$. 6. $(0; 2)$.
7. $576\pi/5$.

Ф и з и к а

Б и л е т 1

3. 3,1 см.

Б и л е т 2

3. Уменьшится в 1,8 раза.

Московский инженерно-физический институт

М а т е м а т и к а

В а р и а н т 1

1. $[-2; 3]$. 2. $y = -2; -1; 1$. 3. $x \in \{12\} \cup \{\pm 2 + 6k\}, k \in \mathbb{Z}; d \in [7; 8] \cup [9; 10] \cup [11; 12]$. 4. $\sqrt{3} \alpha (3 + \sin^2 \gamma) / (12 \sin \gamma)$.

В а р и а н т 2

1. $\{\pi/6; 2\pi/3\}$. 2. По 1,5 кг каждого сплава. 3. $[2^{(1-\log_2 a)/(1+\log_2 2)}; +\infty)$ при $a \in (1/2; 1)$; $(0; +\infty)$ при $a = 1/2$; $(0; 2^{(1-\log_2 a)/(1+\log_2 2)})$ при $a \in (0; 1/2) \cup (1; +\infty)$; \emptyset при $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$. 4. $3\sqrt{3d^2 \operatorname{tg} \beta / (4 + \operatorname{tg}^2 \beta)^{3/2}}$ при $\beta \in [\arctg \sqrt{2}; \pi/2]$; $\sqrt{3d^2 / (\cos \beta (4 + \operatorname{tg}^2 \beta))}$ при $\beta \in (0; \arctg \sqrt{2})$.

В а р и а н т 3

1. $\pi n + (-1)^{n+1} \arcsin 1/4$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $[0; 2) \cup [16; +\infty)$. 3. $[-1/2; 4 + a]$ при $a \geq 9/2$; $[4 - a; 4 + a]$ при $0 < a < 9/2$. 4. $H^2 \sin^2 \alpha / (18 \cos^6 \alpha)$ при $0 < \alpha \leq \arccos \sqrt{1/6}$; \emptyset при $\arccos \sqrt{1/6} < \alpha < \pi/2$.

Ф и з и к а

Б и л е т 1

1. 274 К. 3. 12 В. 4. $7,5 \cdot 10^4$ м/с.

Б и л е т 2

1. $m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$. 2. $1,1 \cdot 10^6$ Па. 3. 2 дптр. 4. $B^2 l^2 v / (2\rho)$.

Московский институт электронного машиностроения

М а т е м а т и к а

В а р и а н т 1

1. $x_1 = 1$, $x_2 = 5a$ при $a \neq -1$; 0 ; $1/5$; 2 ; 11 ; $x = -5$ при $a = -1$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ при $a = 0$; $x = 1$ при $a = 1/5$; $x = 10$ при $a = 2$; $x = 1$ при $a = 11$. 2. $1 - \sqrt{2}$. 3. $\pi(8k + 1)/4$, $\arctg 5 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 4. $a\sqrt{14/4}$. 5. а) $[2; 6]$; б) $[15; 35]$.

В а р и а н т 2

1. $x_1 = 2a - 1$, $x_2 = 3$ при $a \neq -3$; $1/3$; $3/2$; 2 ; $x = -7$ при $a = -3$; $x = 3$ при $a = 1/3$; $3/2$; 2 . 2. $(-1; 2 \log_3 5] \cup (3; +\infty)$. 3. πn , $n \in \mathbb{Z}$. 4. $a^3 \cos^3 \alpha / (1 + 2 \cos 2\alpha)^2$. 5. $a = -2$; $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi(k + l), \frac{\pi}{2}(k - l) \right\}$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

В а р и а н т 3

1. $x_1 = 2a - 3$, $x_2 = 2$ при $a \neq 1$; 2 ; $5/2$; 3 ; $x = -1$ при $a = 1$; $x = 2$

при $a = 2$ и $a = 5/2$; $x = 3$ при $a = 3$. 2. -1. 3. $\pi(12n+5)/6$, $n \in \mathbb{Z}$.
4. $27\pi/128$. 5. $25/17 \leq x^2 + y^2 \leq 17$; $-1,5 \leq y/x \leq 1$.

В а р и а н т 4

1. $x_1 = \frac{n+1}{n-1}$, $x_2 = -1$ при $n \neq 2$; 0; 1; $x = 1/3$ при $n = -2$; $x = -1$
при $n = 1$. 2. 1. 3. $\pi + \arcsin \frac{\sqrt{31-1}}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 4. $a^2 b \sin \alpha \times$
 $\times \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} / \cos \frac{\alpha}{2}$. 5. 2.

Ф и з и к а

1. $0,56 \text{ кг} \leq m_2 \leq 0,85 \text{ кг}$. 2. $2\pi \sqrt{\frac{l(\rho_1 + \rho_2)}{2g|\rho_1 - \rho_2|}}$. 3. 448 К. 4. $13/8 RT_1$.
5. 96,2 кПа; 2,1 кПа. 6. 1,5. 7. 7 В; 7 Ом. 8. $7,4 \cdot 10^{-21} \text{ кг} \cdot \text{м/с}$
9. 126 см. 10. $6 \cdot 10^{20} \text{ с}^{-1}$.

Московский институт электронной техники

Ф и з и к а

В а р и а н т 1

1. 1,2 Дж. 2. 10 г. 3. Mc/R . 4. $-4,2 \cdot 10^6 \text{ В}$; $2,1 \cdot 10^6 \text{ В/м}$. 5. 0,5 Ом;
0,5 В. 6. 60 см или 30 см; случай не возможен.

В а р и а н т 2

1. 15 м/с. 2. 113 Вт. 3. 3780 Дж/(кг·К). 4. В центре треугольника;
 $-q/\sqrt{3}$. 5. 1,4 Ом. 6. 318 нм.

Московский педагогический государственный университет им. В. И. Ленина

М а т е м а т и к а

В а р и а н т 1

1. $5\frac{1}{3}$ часа, $6\frac{2}{3}$ часа. 2. $0 < x < \sqrt[3]{10}$ или $x > \sqrt{5}$. 3. $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} <$
 $< x < \frac{\pi n}{2}$, $x \neq \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$; $n, k \in \mathbb{Z}$. 4. $x = 1$. 5. $\arctg(\sqrt{2} \text{ ctg } \alpha)$.

В а р и а н т 2

1. 27. 2. $x = 1/9$. 3. $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. 4. 6) (0; 2). Если $0 < a \leq 1$, то $x_1 = 0$, $x_2 = 2a$; если $1 < a < 2$, то $x_1 = 2(a-1)$, $x_2 = 2$.
5. $\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 2b^2}$.

В а р и а н т 3

1. 12π . 2. $-2a^{1/4}$. 3. $x = \pi n/3, x = \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}; n, k \in \mathbb{Z}$. 4. $y = 2x + 1$. 5. $x < -1$ или $x > 8$.

В а р и а н т 4

1. $x = 10^5, x = 10$. 2. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n; x = \arctg 2 + \pi k; n, k \in \mathbb{Z}$.
3. $v = 2(2 - \sqrt{3}), S = 2\sqrt{3}$. 4. $x = 10, y = 3/2; x = 10, y = -3/2$.
5. $[-3/2; 2]$.

В а р и а н т 5

1. $\frac{4}{3} \pi i^3 \cos^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}$. 2. $x < -1$ или $x > 4$. 3. 24. 4. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, k, n \in \mathbb{Z}$. 5. $(-2; 2) \cup [4; +\infty)$.

Задачи устного экзамена

1. 77. 2. -9; 0. 5. -4. 6. а) $-\sqrt{5}; \sqrt{5}$; 6) $1/4; 3/8$; в) $1/2$; 1. 8. $p = -5$. (Корни при $p = -5$ существуют). 11. 2. 12. 5. 13. 15. 14.

$$2 \sqrt[4]{\frac{2}{a+ab+b^2}}.$$

Ф и з и к а

1. 3,45 с. 2. $5 \cdot 10^2$ кг/м³. 3. 28,3 м/с. 4. 74,2 кг. 5. $6,4 \cdot 10^5$ Па.
6. $8,3 \cdot 10^{-4}$ м/с². 7. $1,6 \cdot 10^{-8}$ Кл; $3,1 \cdot 10^{-8}$ Кл. 8. 3,8 Ом; 16 Ом.
9. 19,6 А. 10. 10 см.

Московский технический университет связи и информатики

М а т е м а т и к а

В а р и а н т 1

1. $a \in (-\infty; 6)$. 2. 20; 2. 3. $(\log_{5/2} 4; \log_{5/2} 2)$. 4. 40. 5. $x \in [\log_{15} 9; 1]$.

6. $-1/4$. 7. $n, n \in \mathbb{Z}; \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{4k+1}), k = 0, 1, 2, \dots$ 9. $a \in (0; 1]$.
 10. $V = \frac{1}{6} a^3 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \beta$.

В а р и а н т 2

1. $e^4 + e^{-4}$, 2. 12 км/ч, 18 км/ч. 3. $\pm \sqrt{3}$. 4. $\pi - \operatorname{arctg} 2/3$.
 5. $\arccos \frac{k-1}{k}$; $\pi - \arccos \frac{k-1}{k}$, $k > 1$. 6. $2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{6} (\sqrt{7} - 1)$.
 7. $x \in (0; 1) \cup (10; +\infty)$. 9. $(a+1; a; a-1), (-a-1; -a; 1-a)$ при $a \neq 0, a \neq \pm 1$; $(b; 0; -1/b)$ при $a = 0$; $(b; 2/b; 0)$ при $a = 1$; $(0; b; 2/b)$ при $a = -1, b \in \mathbb{R}$. 10. $x = 5$.

В а р и а н т 3

1. $x \in (-\infty; -1)$. 2. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}$. 3. $-2 - \sqrt{10}$.
 4. $x/\sqrt{x^2-9}$. 5. $9/2$. 6. $\frac{1}{2} l^2 \sin \alpha / (\frac{5}{4} - \cos \alpha); 4/5$. 7. $\sqrt{2}$. 8. $a \in (-\infty; -7/4]$. 9. $x \in (-1; 0)$ при $a = 0$; $x \in (-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{4a+1}); a)$ при $a > 0$.
 10. 100 км/ч.

Ф и з и к а

В а р и а н т 1

1. а) $T_2 > T_1$; б) $\nu_2 > \nu_1$. 2. 1,5 с. 3. 120 см. 4. 6,2 г. 5. 12 кОм.

В а р и а н т 2

1. $g \tau$. 2. -50 см. 3. $6,75 \cdot 10^5$ Па. 4. 17,3 см. 5. 46,7 кОм.

Московский физико-технический институт

М а т е м а т и к а

В а р и а н т 1

1. $\arcsin \frac{2}{3} + \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}$. 2. $2\sqrt{2}$. 3. $(x+9)^2/9$. 4. $5/3, 7/3$. 5. $\frac{56}{3} \cdot \frac{S}{v}$.

В а р и а н т 2

1. $x = 1/8$. 2. $x = 5/4$. 3. 2; $a = 1$. 4. $15\sqrt{3}$. 5. $\sqrt{3} - 1$.

В а р и а н т 3

1. $62/5$. 2. $\log_5 \frac{3}{10} < x < \log_5 \frac{1}{3}$, $0 < x < \log_5 3$. 3. $(\arcsin \frac{4}{5} + 2\pi k;$
 $\pm \arccos \frac{\sqrt{15}}{10} + 2\pi m)$, $(-\arcsin \frac{4}{5} + \pi(2k+1); \pm \arccos \frac{\sqrt{15}}{10} + \pi(2m +$
 $+ 1))$, $k, m \in \mathbb{Z}$. 4. 27/20. 5. Π_7, Π_8, Π_9 .

Ф и з и к а

В а р и а н т 1

1. 9° . 2. 1,6 м. 3. $\beta/4$. 4. 2.

В а р и а н т 2

1. 0,3. 2. 6250 Дж. 3. $(1+\sqrt{2}) I\rho/(\sqrt{2}\nu S)$. 4. 1,9 Н.

В а р и а н т 3

1. $2\pi v^2/x^2$. 2. $3/7$. 3. $\frac{Q}{2} \sqrt{\frac{d}{\epsilon_0 SL}}$. 4. 2 см.

Московский энергетический институт

М а т е м а т и к а

В а р и а н т 1

1. $f(x) = x + 1/x$, $x > 0$; $f'(x) = 1 - 1/x^2$, $x > 0$. 2. $\{(1/2; \sqrt{3}/9),$
 $(4; 27)\}$. 3. $q = \sqrt{3}/3$, $b_1 = \sqrt{3}-1$ или $q = \sqrt{3}/3$, $b_1 = -\sqrt{3}-1$. 4. $\{2\pi/3;$
 $8\pi/3; 3\pi/2; 7\pi/2\}$. 5. $\frac{\pi}{9} (3+2\sqrt{3})(b-a)^2 + 2\pi\sqrt{3}a^2$.

В а р и а н т 2

1. $-\frac{1}{2} a\sqrt{a^2+8}$ при $a \geq 0$, $b = a+1$. 2. $(0; 10) \cup \{100\}$. 3. 24 км.
4. $\{11\pi/6; 5\pi/2\}$. 5. 100.

Ф и з и к а

В а р и а н т 1

3. 50 Н. 4. $\sqrt{5qQ/(11\pi\epsilon_0 mR)}$. 5. 7,5 В.

В а р и а н т 2

3. $(p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$. 4. 1,5 кН/м. 5. 240 Вт.

М а т е м а т и к а

В а р и а н т 1

1. $\{-2; 4/3; 3\}$. 2. $[-9; 17,5 + 0,4\sqrt{29})$. 3. $\{-5\pi/12; -\pi/4; -\pi/12; \pi/4; 7\pi/12\}$. 4. $50/3$. 5. $(-1/\sqrt{3}; 0) \cup (2/5; 1/2)$.

В а р и а н т 2

1. $(-\infty; -(1+\sqrt{5})/2) \cup (1/\pi; (\sqrt{5}-1)/2) \setminus \{k\pi\}$, $k < 0$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. $\pi m/2$; $\pm \pi/3 + \pi n$; $m, n \in \mathbb{Z}$; $\{2\pi/3\}$. 3. $(2/3; 1) \cup (1; +\infty)$. 4. $\pi/3$; $\pi/3$; $\pi/3$. 5. $\{1/30; 2/19; 3/8; 7/5; 11/2\}$.

В а р и а н т 3

1. $\{-2; 0\}$. 2. $(0; 1) \cup \{7\}$. 3. $x = \pm 2\pi/3 + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; $k = 17$. 4. $1 - \pi/8$. 5. Можно.

В а р и а н т 4

1. $[0; +\infty)$. 2. $(2; 1)$; $(\sqrt{2}; \sqrt{2}/2)$. 3. $f(x) = \begin{cases} 3-2\sqrt{x} & \text{при } 0 \leq x < 9, \\ -3 & \text{при } x > 9. \end{cases}$
Точка $(0; 3)$ принадлежит графику, а $(9; -3)$ – нет. 4. $5\pi/6 + 2\pi m$; $\pi/18 + 2\pi n/3$, $n \neq 3k - 1$, $m, n, k \in \mathbb{Z}$. 5. $Rr(R-r)/(R+r)$.

Ф и з и к а

1. 4 с. 2. 1,14 Н. 3. $\alpha = \arctg(\omega r/v_0)$. 4. $m_1(1 + m_1/m_2)^2 g^2 t^3/(32L)$.
5. $1/2 \operatorname{tg} \alpha$. 6. $(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)/(h_1 + h_2)$. 7. 420 К. 8. $5q^2/(12\pi\epsilon_0 L)$;
 $q\sqrt{3/(4\pi\epsilon_0 mL)}$. 9. $QB_0/(2m)$. 10. 82 м^2 .

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ И ТЕОРЕМЫ

АЛГЕБРА

Формулы сокращенного умножения

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab(a \pm b);$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b); \quad a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

Если n — натуральное число, то

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n}).$$

Модуль действительного числа

По определению

$$|a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Из определения следуют свойства

$$|a| = |-a|; \quad |ab| = |a| \cdot |b|;$$

$$|a/b| = |a|/|b|; \quad |a|^2 = a^2; \quad |a \pm b| \leq |a| + |b|;$$

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b|.$$

Кроме того, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Отметим также важные свойства неравенств:

$$\begin{array}{ccc} |u| \leq v & |u| \geq v & |u| \geq |v| \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ -v \leq u \leq v; & \left[\begin{array}{l} u \geq v, \\ u \leq -v; \end{array} \right. & u^2 - v^2 \geq 0. \end{array}$$

Квадратные уравнения

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, b , c — действительные числа, вычисляются по формулам

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \text{ при } D > 0.$$

Здесь $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант данного уравнения.

Если $D = 0$, то $x = -b/2a$.

Уравнение не имеет корней, если $D < 0$.

Т е о р е м а В и е т а. Действительные числа x_1 и x_2 тогда и только тогда удовлетворяют уравнению $ax^2 + bx + c = 0$, когда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Справедливы соотношения

$$ax^2 + bx + c = a \left[x + \frac{b}{2a} \right]^2 - \frac{D}{4a} = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Корни степени n

Арифметическим корнем степени $n \in \mathbf{N}$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b такое, что $b^n = a$. Принять

обозначения $b = \sqrt[n]{a}$ при $n = 2$ и $b = \sqrt[n]{a}$ при $n \geq 3$.

Свойства арифметических корней ($a \geq 0, b \geq 0$):

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad nk\sqrt[n]{a^k} = n\sqrt[n]{a}; \quad n\sqrt[n]{k\sqrt[n]{a}} = nk\sqrt[n]{a}; \quad (n\sqrt[n]{a})^k = n\sqrt[n]{a^k}.$$

Свойства степеней. Степени с дробным показателем

Пусть $a > 0$. По определению,

$$1) a^0 = 1; \quad 2) a^{-n} = 1/a^n; \quad n \in \mathbf{N}; \quad 3) a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Свойства степеней с произвольными показателями ($a > 0, b > 0$):

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad a^x / a^y = a^{x-y}; \quad (a^x)^y = a^{xy}; \quad (ab)^x = a^x \cdot b^x.$$

Свойства логарифмов

$$\log_a x_1 x_2 = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|, \quad x_1 x_2 > 0;$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|, \quad x_1 x_2 > 0;$$

$$\log_a x^p = p \log_a x, \quad x > 0; \quad \log_a x^2 = 2 \log_a |x|, \quad x \neq 0;$$

$$\log_a^q x = -\frac{1}{q} \log_a x, \quad x > 0, q \neq 0,$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad x > 0, b > 0, b \neq 1.$$

Решение простейших показательных и логарифмических уравнений и неравенств ($a > 0, a \neq 1$)

$$a^x = b \quad (b > 0) \Leftrightarrow x = \log_a b; \quad \log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b;$$

$a^x > b \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ при $b \leq 0$; $x > \log_a b$ при $a > 1, b > 0$; $x < \log_a b$ при $0 < a < 1, b > 0$; $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$ при $0 < a < 1$; $x > a^b$ при $a > 1$.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Функции одного и того же угла

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0);$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0);$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad (\sin \alpha \neq 0, \cos \alpha \neq 0);$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha \quad (\cos \alpha \neq 0);$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad (\sin \alpha \neq 0).$$

Формулы сложения

$$\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha;$$

$$\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg} (\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (\cos \alpha \neq 0,$$

$$\cos \beta \neq 0, \cos (\alpha + \beta) \neq 0).$$

Формулы приведения

Угол	$\frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\pi \pm \alpha$	$\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$
Функция	$90^\circ \pm \alpha$	$180^\circ \pm \alpha$	$270^\circ \pm \alpha$
синус	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\sin \alpha$
косинус	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
тангенс	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$
котангенс	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$
секанс	$\mp \operatorname{cosec} \alpha$	$-\sec \alpha$	$\pm \operatorname{cosec} \alpha$
косеканс	$\sec \alpha$	$\mp \operatorname{cosec} \alpha$	$-\sec \alpha$

Формулы двойных, половинных углов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0, \cos 2\alpha \neq 0);$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha/2; \quad 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \alpha/2;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0, \sin \alpha \neq 0).$$

Универсальная подстановка

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0); \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0).$$

Формулы тройных углов

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

Преобразование суммы функций в произведение

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad (\cos \alpha \neq 0, \cos \beta \neq 0);$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad (\cos \alpha \neq 0, \cos \beta \neq 0);$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \quad (\sin \alpha \neq 0, \sin \beta \neq 0);$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta} = - \frac{\sin (\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} \\ (\sin \alpha \neq 0, \sin \beta \neq 0).$$

Преобразование произведения функций

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)).$$

Простейшие тригонометрические уравнения

$$\underline{\sin x = a} \quad (|a| \leq 1):$$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}; \quad \arcsin (-a) = -\arcsin a.$$

$$\underline{\cos x = a} \quad (|a| \leq 1):$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$0 \leq \arccos a \leq \pi, \quad \arccos (-a) = \pi - \arccos a.$$

$$\underline{\text{tg } x = a} \quad (a \in \mathbb{R}):$$

$$x = \arctg a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arctg a < \frac{\pi}{2}; \quad \arctg(-a) = -\arctg a.$$

$$\underline{\text{ctg } x = a} \quad (a \in \mathbb{R}):$$

$$x = \text{arccctg } a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$0 < \text{arccctg } a < \pi, \quad \text{arccctg}(-a) = \pi - \text{arccctg } a.$$

Частные случаи

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \text{tg } x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \text{ctg } x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow \pi = x + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Основные тождества для обратных тригонометрических функций

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}, \quad |a| \leq 1;$$

$$\arctg a + \text{arccctg } a = \frac{\pi}{2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Некоторые формулы и теоремы планиметрии

Пусть a, b, c — стороны треугольника ABC , α, β, γ — противолежащие им углы, m_a, m_b, m_c — медианы, h_a, h_b, h_c — высоты, l_A, l_B, l_C — биссектрисы, проведенные через вершины A, B, C соответственно.

Пусть также R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности, S — площадь треугольника ABC , p — его полупериметр.

Если треугольник ABC прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), $CD = h$ — его высота, опущенная на гипотенузу AB из вершины C , $AD = b'$,

$BD = a'$, то

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (теорема Пифагора);}$$

$$a^2 = a'c, b^2 = b'c, a'b' = h^2,$$

$$R = c/2, r = (a + b - c)/c, S = \frac{1}{2} ab$$

Для произвольного треугольника имеем

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \text{ (теорема синусов);}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \text{ (теорема косинусов);}$$

$$S = \frac{1}{2} a b \sin \gamma = \frac{abc}{4R} = rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Свойство биссектрисы угла треугольника

Пусть биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке L , $BL = x$, $CL = y$. Тогда $x/y = c/b$.

Свойство параллелограмма

Пусть a и b — стороны параллелограмма, d_1 и d_2 — его диагонали. Тогда

$$2(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2.$$

Теоремы о произведениях отрезков секущих

1. Пусть прямые l_1 и l_2 , проходящие через точку S , пересекают некоторую окружность в точках A и B и C и D соответственно. Тогда

$$SA \cdot SB = SC \cdot SD.$$

2. Если из точки S вне окружности проведена касательная ST (T — точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках A и B , то

$$SA \cdot SB = ST^2.$$

3. Выпуклый четырехугольник является вписанным в окружность тогда и только тогда, когда сумма любых двух его противоположных углов равна 180° .

4. Выпуклый четырехугольник является описанным около окружности тогда и только тогда, когда суммы длин его противоположных сторон равны.

5. Площадь выпуклого четырехугольника равна $\frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \gamma$, где d_1 ,

d_2 — диагонали четырехугольника, а γ — угол между ними.

Уважаемые читатели!

Этой книгой журнал "Квант"
начинает выпуск
приложений, содержащих лучшее из того,
что появилось на страницах журнала
за 23 года его существования.
В настоящее время редакция готовит к выпуску
следующие приложения (названия условные):

- 1. ФИЗИЧЕСКИЙ КАЛЕЙДОСКОП**
(сборник физических клипов);
- 2. ЗАДАЧИ ГОРОДСКИХ И ОБЛАСТНЫХ
ОЛИМПИАД ПО МАТЕМАТИКЕ;**
- 3. ШКОЛА В "КВАНТЕ"**
(физика) — 2 сборника;
- 4. ШКОЛА В "КВАНТЕ"**
(математика);
- 5. ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА**
(математика и физика) — 2 сборника.

*Приложения будут доставляться
подписчикам журнала
и продаваться в розницу.*

МАТЕРИАЛЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ

Задачи по математике и физике

Под редакцией Н. Х. Розова и А. Л. Стасенко

Приложение к журналу «Квант», выпуск 1

Редакторы А. Ю. Котова, В. А. Тихомирова

Литературный редактор Л. В. Кардасевич

Художественный редактор К. В. Ильющенко

Технический редактор Е. С. Потапенкова

ИБ № 2

103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Формат 84×108 1/32. Бумага офс. №

Гарнитура литературная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 16,8. Усл. кр.-отт. 16,7. Уч.-изд. л. 19,5.

Тираж 100 000 экз. Заказ 861. Цена договорная.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской области